XV. Lineární rovnice prvního řádu

- **Lineární diferenciální rovnice prvního řádu** je rovnice tvaru

  $$y' + p(x)y = q(x),$$

  kde p a q jsou funkce spojité na daném intervalu (a,b). Je-li funkce q nulová, mluvíme o **homogenní rovnici**.
- Zobrazení

  $$L : y \mapsto y' + p(x)y$$

  je lineární zobrazení prostoru $\mathcal{C}^1(a,b)$ do prostoru $\mathcal{C}(a,b)$. Řešení lze tedy rozdělit na řešení homogenní rovnice a hledání partikulárního řešení a použít Větu IX.6.
- Homogenní rovnice je rovnicí se separovanými proměnnými. Množina všech řešení má tvar

  $$\{cy_h \in \mathbf{R}\},$$

  kde $y_h \in \mathcal{C}^1(a,b)$ je nějaká funkce nenabývající hodnoty 0. Je to tedy vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^1(a,b)$ dimenze 1.
- **Variace konstanty.** Partikulární řešení lze hledat a najít ve tvaru

  $$y(x) = c(x)y_h(x),$$

  kde y_h je nějaké nenulové řešení homogenní rovnice (tj. $\{y_h\}$ je báze prostoru řešení homogenní rovnice).
- **Metoda integračního faktoru.** Rovnici lze přímo řešit tak, že ji vynásobíme funkcí $e^{P(x)}$, kde P je primitivní funkce k p, a pak levou stranu vyjádříme jako derivaci součinu.
- **Existence a jednoznačnost řešení.** Pro každé $x_0 \in (a,b)$ a každé $y_0 \in \mathbf{R}$ existuje právě jedno maximální řešení y, které splňuje $y(x_0) = y_0$. Navíc je y definováno na celém (a,b).