XIV.1 Metoda řešení rovnice se separovanými proměnnými

Rovnicí se separovanými proměnnými rozumíme diferenciální rovnic tvaru

$$y' = g(y) \cdot h(x),$$

kde g a h jsou reálné funkce reálné proměnné spojité na svých definičních oborech. Následuje metoda řešení těchto rovnic.

`Krok 1.` Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce h. Tím vymezíme maximální intervaly, na kterých budeme hledat řešení.

`Krok 2.` Najdeme všechny nulové body funkce g. Tím dostaneme **singulární řešení** (někdy jim říkáme **stacionární řešení**) na každém z intervalů z 1. kroku.

`Krok 3.` Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je funkce g spojitá a nenulová.

`Krok 4.` Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je spojitá a nenulová na J. Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J. Je-li $y(x)$ takové řešení, pak pro něj platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Nechť H je primitivní funkce k h na intervalu I a G je primitivní funkce k funkci $1/g$ na J. Pak existuje konstanta $c \in \mathbf{R}$ taková, že

$$G(y(x)) = H(x) + c.$$

`Krok 5.` Nyní zafixujeme c a pro pevné c najdeme ta $x \in I$, pro která $H(x) + c \in G(J)$. Z takových x opět utvoříme maximální otevřené intervaly. Na každém z těchto intervalů řešení musí mít tvar

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c),$$

kde G^{-1} značí funkci inverzní k funkci G. Dosazením se snadno přesvědčíme, že každá funkce tohoto tvaru je skutečně řešením.

`Krok 6.` Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku slepíme všechna maximální řešení. Přitom užíváme faktu: Nechť y_1 a y_2 jsou řešení, první na intervalu (a, b) a druhé na intervalu (b, c), přičemž $b \in D_h$. Předpokládejme, že

$$\lim_{x \to b-} y_1(x) = \lim_{x \to b+} y_2(x) = \alpha \in D_g$$

Pak funkce

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a, b); \\ \alpha, & x = b; \\ y_2(x), & x \in (b, c); \end{cases}$$

je také řešením.