

XVII.5 Stabilita stacionárních řešení autonomních soustav

Uvažujme soustavu

$$(*) \quad \mathbf{x}'(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)),$$

kde \mathbf{g} je zobrazení třídy \mathcal{C}^1 definované na otevřené množině $G \subset \mathbf{R}^n$ s hodnotami v \mathbf{R}^n .

Definice. Řekneme, že $\mathbf{a} \in G$ je **stacionární bod rovnice** (*), jestliže $\mathbf{g}(\mathbf{a}) = \mathbf{o}$.

Definice. Řekneme, že stacionární bod $\mathbf{a} \in G$ rovnice (*) je

- (i) **stabilní**, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé maximální řešení \mathbf{x} rovnice (*) splňující $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{a}\| < \delta$ platí:
 - \mathbf{x} je definováno na otevřeném intervalu obsahujícím interval $\langle 0, +\infty \rangle$;
 - $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{a}\| < \varepsilon$ pro všechna $t \in \langle 0, +\infty \rangle$;
- (ii) **nestabilní**, jestliže není stabilní;
- (iii) **asymptoticky stabilní**, jestliže je stabilní a existuje $\Delta > 0$ takové, že pro každé maximální řešení \mathbf{x} rovnice (*) splňující $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{a}\| < \Delta$ platí $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{a}$.

Věta 14. Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$.

- (i) Stacionární bod \mathbf{o} rovnice $\mathbf{x}' = \mathbb{A}\mathbf{x}$ je asymptoticky stabilní, právě když $\operatorname{Re} \lambda < 0$ pro každé vlastní číslo λ matice \mathbb{A} .
- (ii) Stacionární bod \mathbf{o} rovnice $\mathbf{x}' = \mathbb{A}\mathbf{x}$ je stabilní, právě když pro každé vlastní číslo λ matice \mathbb{A} platí buď $\operatorname{Re} \lambda < 0$, nebo $\operatorname{Re} \lambda = 0$ a násobnost vlastního čísla λ je rovna $n - h(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})$.

Věta 15 (Ljapunovova věta). Nechť \mathbf{a} je stacionární bod rovnice (*). Označme

$$\mathbb{A} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \right)_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}.$$

Pak platí:

- (i) Jestliže pro každé vlastní číslo λ matice \mathbb{A} platí $\operatorname{Re} \lambda < 0$ (tj. je-li \mathbf{o} asymptoticky stabilní pro $\mathbf{x}' = \mathbb{A}\mathbf{x}$), pak \mathbf{a} je asymptoticky stabilní stacionární bod rovnice (*).
- (ii) Jestliže alespoň jedno vlastní číslo matice \mathbb{A} má kladnou reálnou část, pak je \mathbf{a} nestabilní stacionární bod rovnice (*).