

XVII.4 Vlastnosti maximálních řešení

Uvažujme soustavu

$$(2) \quad \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)),$$

kde máme $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$,
 $\mathbf{x}'(t) = [x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t)]$ a dále $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_n]$.

Věta 10 (o pouštění kompaktu). *Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená, $K \subset G$ je kompaktní, \mathbf{f} je spojitá na G , \mathbf{x} je maximální řešení rovnice (2) definované na intervalu (α, β) , $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $[t_0, \mathbf{x}(t_0)] \in K$. Pak existují $\tau_1 \in (\alpha, t_0)$ a $\tau_2 \in (t_0, \beta)$ taková, že $[\tau_i, \mathbf{x}(\tau_i)] \notin K$, $i = 1, 2$.*

Lemma 11 (Gronwallovo lemma). *Nechť funkce u je spojitá a nezáporná na intervalu $\langle t_0, t_1 \rangle$, $t_0 \in \mathbf{R}$, $t_1 \in \mathbf{R}^*$. Nechť existují čísla $a \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ taková, že*

$$u(t) \leq a + \int_{t_0}^t (\alpha u(s) + \beta) ds, \quad t \in \langle t_0, t_1 \rangle.$$

Pak

$$u(t) \leq \left(a + \frac{\beta}{\alpha} \right) e^{\alpha(t-t_0)}, \quad t \in \langle t_0, t_1 \rangle.$$

Věta 12 (o rovnicích s lineárním růstem). *Nechť $G = (a, b) \times \mathbf{R}^n$, \mathbf{f} je spojitá na G a existují funkce α, β spojitě na (a, b) takové, že pro každé $[t, \mathbf{x}] \in G$ platí*

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| \leq \alpha(t)\|\mathbf{x}\| + \beta(t).$$

Pak každé maximální řešení rovnice (2) je definováno na celém intervalu (a, b) .

Věta 13 (o spojitě závislosti na počátečních podmínkách). *Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená a \mathbf{f} splňuje podmínku (3) z Věty 3. Nechť \mathbf{x} je maximální řešení soustavy (2) definované na intervalu (α, β) . Nechť $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Pak pro každou trojici čísel $\tau_1 \in (\alpha, t_0)$, $\tau_2 \in (t_0, \beta)$ a $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé maximální řešení \mathbf{y} splňující $\|\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{x}(t_0)\| < \delta$, platí:*

- \mathbf{y} je definováno v každém bodě intervalu $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$,
- $\forall t \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle : \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| < \varepsilon$.