XIV.2 Autonomní diferenciální rovnice

Autonomní rovnicí rozumíme diferenciální rovnici tvaru

$$y' = g(y),$$

kde g je reálná funkce spojitá na svém definičním oboru.

Pozorování. Nechť funkce y je řešením autonomní rovnice na intervalu (a,b). Pak pro každé $c \in \mathbf{R}$ je funkce $\tilde{y}(x) = y(x+c)$ řešením téže rovnice na intervalu $(a-c, b-c)$.

Věta 1. *Každé řešení autonomní rovnice je monotónní.*

Poznámka. Autonomní rovnice jsou speciální případ rovnic se separovanými proměnnými. Dají se tedy řešit podle metody z předchozího oddílu, která je v tomto případě jednodušší.

Větička 2. *Uvažujme autonomní rovnici $y' = g(y)$. Nechť funkce g je kladná na intervalu (a,b), $c \in (a,b)$ je libovolný bod a y je řešení s hodnotami v (a,b) definované na maximálním možném intervalu (tj. jedno z řešení nalezených v pátém kroku).*

(a) *Pokud $\int_a^c \frac{1}{g}$ konverguje a $\int_c^b \frac{1}{g}$ konverguje (tj. $\int_a^b \frac{1}{g}$ konverguje), je řešení y definováno na omezeném intervalu.*
(b) *Pokud $\int_a^c \frac{1}{g}$ diverguje a $\int_c^b \frac{1}{g}$ konverguje, je řešení y definováno na intervalu $(-\infty, T)$, kde $T \in \mathbf{R}$.*
(c) *Pokud $\int_a^c \frac{1}{g}$ konverguje a $\int_c^b \frac{1}{g}$ diverguje, je řešení y definováno na intervalu $(T, +\infty)$, kde $T \in \mathbf{R}$.*
(d) *Pokud $\int_a^c \frac{1}{g}$ diverguje a $\int_c^b \frac{1}{g}$ diverguje, je řešení definováno na celém $\mathbf{R}$.*

Poznámky.

(1) Integrálem v předchozím tvrzení rozumíme zobecněný Riemannův integrál.
(2) Pokud navíc $g(b) = 0$ a nastane případ (a) nebo (b), pak lze řešení y prodloužit „doprava“ konstantní funkcí rovnou b. Analogicky lze y prodloužit „doleva“ konstatní funkcí rovnou a, jestliže $g(a) = 0$ a nastane případ (a) nebo (c).
(3) Analogická tvrzení platí, pokud g je záporná na (a,b).

Věta 3. *Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Nechť g je funkce spojitá a kladná na intervalu $\langle a, b)$.*

(1) *Pokud má funkce g v bodě b zleva nenulovou limitu, pak $\int_a^b \frac{1}{g}$ konverguje.*

(2) *Pokud existuje takové $\alpha < 1$, že existuje nenulová limita $\lim\limits_{x\to b-} \frac{g(x)}{(b-x)^\alpha}$, pak $\int_a^b \frac{1}{g}$ konverguje.*

(3) *Pokud navíc $g(b) = 0$ a existuje vlastní derivace $g'_-(b)$, pak $\int_a^b \frac{1}{g}$ diverguje.*

Věta 4. *Nechť $a \in \mathbf{R}$ a nechť g je funkce spojitá a kladná na intervalu $\langle a, +\infty)$.*

(1) *Pokud existuje takové $\alpha > 1$, že existuje nenulová limita $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x^\alpha}$, pak $\int_a^{+\infty} \frac{1}{g}$ konverguje.*

(2) *Pokud existuje vlastní limita $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x}$, pak $\int_a^{+\infty} \frac{1}{g}$ diverguje.*

Poznámka Analogie Vět 3 a 4 platá i pro intervaly $(b, a\rangle$ a $(-\infty, a\rangle$.

Důsledek. *Nechť g je reálná funkce, která má v každém bodě svého definičního oboru vlastní derivaci. Pak pro každé $x_0 \in \mathbf{R}$ a každé $y_0 \in D_g$ existuje právě jedno maximální řešení y rovnice $y' = g(y)$ splňující podmínku $y(x_0) = y_0$.*