

Ukázky možných čtveřic tvrzení v otázce 3 ústní zkoušky

1. Které implikace mezi následujícími tvrzeními platí? Své závěry zdůvodněte a alespoň pro dvě implikace podrobně dokažte. (f je funkce definovaná na \mathbf{R} .)

- (1) f je spojitá na $\langle 0, 1 \rangle$;
- (2) f'_+ , f'_- jsou spojité na $\langle 0, 1 \rangle$;
- (3) množina $f(\langle 0, 1 \rangle)$ je omezená.
- (4) f nabývá na $\langle 0, 1 \rangle$ svého minima i maxima.

Výsledek: Platí $2 \Rightarrow 1 \Rightarrow 4 \Rightarrow 3$. Obrácené implikace neplatí.

Zdůvodnění: $2 \Rightarrow 1$: Jsou-li f'_+ , f'_- spojité, jsou vlastní, a tedy f je spojitá v každém bodě $\langle 0, 1 \rangle$, a tedy i na $\langle 0, 1 \rangle$.

$1 \not\Rightarrow 2$: Funkce $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$ splňuje 1 ale ne 2.

$1 \Rightarrow 4$: Plyne z věty o nabývání extrémů pro spojitou funkci na uzavřeném intervalu.

$4 \not\Rightarrow 1$: Funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ splňuje 4, ale ne 1.

$4 \Rightarrow 3$: Toto je zřejmé – maximum funkce f na $\langle 0, 1 \rangle$ je horní závorou množiny $f(\langle 0, 1 \rangle)$, minimum funkce f na $\langle 0, 1 \rangle$ je dolní závorou množiny $f(\langle 0, 1 \rangle)$.

$3 \not\Rightarrow 4$: Funkce $f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$ splňuje 3, ale ne 4.

Podrobný důkaz spočívá v důkazu použitých vět či podrobném vysvětlení protipříkladu.

2. Které implikace mezi následujícími tvrzeními platí? Své závěry zdůvodněte a alespoň pro dvě implikace podrobně dokažte. ($\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel.)

- (1) $\{a_n\}$ je konvergentní.
- (2) Existuje vybraná posloupnost z $\{a_n\}$, která je konvergentní.
- (3) $\{a_n\}$ má limitu.
- (4) $\{a_n\}$ je omezená.

$$1 \Rightarrow 4 \Rightarrow 2$$

Výsledek: Platí implikace \Downarrow a jiné ne.
3

$1 \Rightarrow 4$ plyne z věty o omezenosti konvergentní posloupnosti.

$4 \Rightarrow 2$ plyne z Bolzano-Weierstrassovy věty.

$1 \Rightarrow 3$ plyne z definic použitých pojmů.

$2 \not\Rightarrow 4$: Posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_{2n} = 0$ a $a_{2n-1} = n$ splňuje 2, ale ne 4.

$4 \not\Rightarrow 3$: Posloupnost $\{(-1)^n\}$ splňuje 4, ale ne 3.

$3 \not\Rightarrow 2$: Posloupnost $\{n\}$ splňuje 3, ale ne 2.

Podrobný důkaz spočívá v důkazu použitých vět či podrobném vysvětlení protipříkladu.

Poznámka. V uvedených příkladech nejsou vyjmenovány všechny implikace. Nicméně o platnosti ostatních lze rozhodnout na základě uvedených implikací. Například v prvním příkladu platí i implikace $2 \Rightarrow 4$, jejíž platnost plyne z platnosti $2 \Rightarrow 1$ a $1 \Rightarrow 4$. Stejně tak v druhém příkladu neplatí třeba implikace $3 \Rightarrow 1$. Kdyby totiž platila, pak by díky platnosti $1 \Rightarrow 4$ a $4 \Rightarrow 2$ platila i implikace $3 \Rightarrow 2$, o níž jsme ukázali, že neplatí.