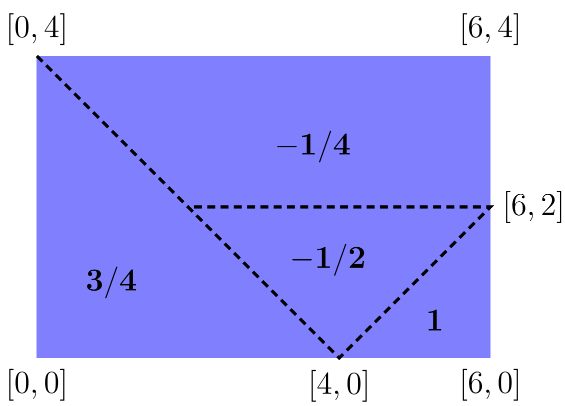
Matematika III – vzorové příklady pro teoretický test

1. Nechť f je spojitá funkce na intervalu I, která má v každém bodě intervalu I vlastní derivaci. Určete primitivní funkci k funkci $\frac{f'}{1-f}$ a popište intervaly existence.

2. Nechť f je spojitá funkce na intervalu $(1,2)$ a F je její primitivní funkce. Určete primitivní funkci k funkci $xf(x^2)$ a popište intervaly existence.

3. Nechť f je spojitá funkce na intervalu $(2,4)$ a platí $\int_2^4 f = 7$. Určete, přes jaký interval lze spočítat zobecněný Riemannův integrál z funkce $f(\frac{2-4x}{5})$ a tento integrál spočtěte.

4. Spočtěte Lebesgueův integrál z jednoduché funkce definované na $\mathbf{R}^2$, jejíž hodnoty jsou znázorněné na obrázku (mimo vyznačenou plochu má funkce hodnotu 0).



5. Nechť f je měřitelná funkce na $\mathbf{R}^2$, pro kterou platí $\int_{(1,2)\times(2,4)} f = 5$. Najděte nějakou měřitelnou množinu $A \subset \mathbf{R}^2$, která není nulová a pro niž lze spočítat $\int_A yf(x+y, y^2)\,dx\,dy$. Tento integrál spočtěte.

6. Nechť f je měřitelná funkce na $\mathbf{R}$, pro kterou platí $\int_{\mathbf{R}} f = 5$. Spočtěte integrál
$$\int_{\{[x,y,z]\in\mathbf{R}^3:\, y^2+z^2\le 2\}} f(x+2y+3z)\,dx\,dy\,dz$$

7. Najděte nějakou bázi prostoru $\mathbf{R}^4$, která obsahuje vektrory $[1,1,1,1]$ a $[1,2,3,4]$.

8. Najděte nějakou bázi prostoru

$$\mathrm{lin}_{\mathbf{R}}\{1-x-2x^2, 1+x+2x^2, 1-x-2x^2-3x^3, 1+x+2x^2+3x^3\}.$$

(Jde o podprostor prostoru $C(\mathbf{R})$.)

9. Určete, která z následujících zobrazení $L : C(\mathbf{R}) \to C(\mathbf{R})$ jsou lineární.

   (a) $L(f)(x) = f(x^2+1)$, $x \in \mathbf{R}$, $f \in C(\mathbb{R})$.
   (b) $L(f)(x) = f(x)^2 + 1$, $x \in \mathbf{R}$, $f \in C(\mathbb{R})$.
   (c) $L(f)(x) = f(x + \sin x)$, $x \in \mathbf{R}$, $f \in C(\mathbb{R})$.
   (d) $L(f)(x) = f(x) \cdot \sin x$, $x \in \mathbf{R}$, $f \in C(\mathbb{R})$.
   (e) $L(f)(x) = f(x) + \sin x$, $x \in \mathbf{R}$, $f \in C(\mathbb{R})$.

10. Popište jádro lineárního zobrazení $L : \mathfrak{s} \to \mathfrak{s}$ definovaného vzorcem

$$L(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{x_{n+1} - 2x_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

11. Napište příklad lineárního zobrazení $L : C(\mathbf{R}) \to C(\mathbf{R})$, jehož jádrem jsou právě polynomy stupně nejvýše 1.

12. Nechť V je prostor všech polynomů stupně nejvýše 7. Nechť $L : V \to V$ je lineární zobrazení definované vzorcem

$$L(f)(x) = f(x) - \frac{x}{3} f'(x), \quad x \in \mathbf{R}, f \in V.$$

Popište jádro zobrazení L a určete $\dim \operatorname{Im} L$.

13. Nechť $\mathbb{A}$ je symetrická matice řádu 3, která má na diagonále prvky $1, 2, 3$. Co lze na základě toho usoudit o její povaze (definitnosti)?

14. Pro jaké hodnoty parametru $x \in \mathbf{R}$ je matice $\begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 8 \end{pmatrix}$ pozitivně definitní?

15. Napište příklad čtvercové matice řádu 2, jejíž všechny prvky jsou nenulové, a která má vlastní čísla 1 a -1.

16. Napište příklad čtvercové matice řádu 3, jejíž všechny prvky jsou nenulové a pro kterou je vektor $[1, -2, 3]$ vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 4.

17. Nechť f, g jsou dvě funkce, které mají v bodě 0 vlastní druhou derivaci. Spočtěte $T_2^{\frac{f}{g},0}$, pokud $T_2^{f,0}(x) = 1 + 2x + 3x^2$ a $T_2^{g,0}(x) = 1 - 3x^2$.

18. Najděte $a, b \in \mathbf{R}$, aby limita

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x \cos x - ax^3 - bx^5}{x^7}$$

byla vlastní a nenulová, a spočtěte tuto limitu.

19. Nechť f je funkce třídy C^2 na okolí bodu $[1, 1] \in \mathbf{R}^2$, pro kterou platí $\nabla f(1, 1) = [0, 0]$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 5$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) = 1$. Co lze říci na základě těchto informací o chování f v okolí bodu $[1, 1]$? (Jaký druh lokálního extrému zde může být? Musí jít o lokální extrém, nebo zde může být sedlový bod?)

20. Napište příklad funkce f třídy C^∞ na $\mathbf{R}^2$, která má v bodě $[1, 2]$ lokální maximum, které není ostré, a v bodě $[2, 1]$ má sedlový bod.