**Komentář k oddílu X.2 – Taylorovy řady funkcí jedné proměnné**

**K definici, motivaci, Větě X.7 a jejímu důsledku:**

- V oddílu X.1 jsme definovali Taylorův polynom. Pokud $f$ má vlastní $k$-tou derivaci v bodě $a$, pak lze definovat Taylorův polynom $T_k^{f,a}$ a ten dobře aproximuje funkci $f$ v blízkosti bodu $a$ ve smyslu Věty X.1.

  Pokud je $f$ dokonce třídy $C^{k+1}$ na okolí bodu $a$, pak lze odhadnout chybu při nahrazení funkce $f$ polynomem $T_k^{f,a}$ podle Věty X.7.

- Pokud $f$ má v bodě $a$ derivace všech řádů, lze definovat Taylorův polynom každého řádu.

  Lze také definovat Taylorovu řadu – to je taková řada, jejíž částečné součty jsou Taylorovy polynomy příslušných řádů.

  Protože čím je Taylorův polynom vyššího řádu, tím přesněji aproximuje $f$, je přirozené očekávat, že (za určitých předpokladů) bude součet Taylorovy řady roven funkci $f$.

- Připomeňme, že součet nekonečné řady je definován, jako posloupnost částečných součtů. To znamená, že skutečnost, že $f$ je v nějakém bodě součtem své Taylorovy řady lze charakterizovat následovně:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \Leftrightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$
$$\Leftrightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n^{f,a}(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left(f(x) - T_n^{f,a}(x)\right) = 0. \qquad (*)$$

  K důkazu poslední rovnosti se mohou hodit různé odhady zbytku (tj. chyby), například Věta X.5 (a další, které jsme si neuváděli).

- Máme-li funkci $f$, která má v bodě $a$ derivace všech řádů, a tedy můžeme definovat její Taylorovu řadu o středu $a$, pak součet této řady v bodě $a$ je vždy roven $f(a)$.

  To je triviální, protože první člen řady je $f(a)$ a ostatní členy jsou nulové.

  To, co je zajímavé, je tedy otázka, zda je $f$ součtem Taylorovy řady i v nějakých jiných bodech. Odpověď je, že někdy ano a někdy ne.

  V tomto oddílu si ukážeme několik případů, kdy odpověď je kladná. K tomu slouží například Věta X.7.

- Věta X.7 – předpoklady a tvrzení:

  V této větě jsou dva důležité předpoklady:

  – Funkce $f$ má být třídy $C^\infty$ na intervalu $(a-r, a+r)$. Neboli, má mít na intervalu $(a-r, a+r)$ derivace všech řádů.
  – Navíc mají být derivace všech řádů na tomto intervalu omezené, a to všechny stejnou konstantou.

  Za těchto předpokladů věta říká, že $f$ je součtem své Taylorovy řady o středu $a$, a to v každém bodě intervalu $(a-r, a+r)$.

- Důkaz Věty X.7:

  V důkazu využijeme Větu X.5.

  Nechť tedy $x \in (a-r, a+r)$ je libovolné. Pokud $x = a$, je $f(x)$ $(= f(a))$ součtem Taylorovy řady o středu $a$ v bodě $x$ $(= a)$, protože to triviálně platí vždy (viz výše).

  Dále předpokládejme, že $x \neq a$.

  Podle ekvivalence $(*)$ výše stačí ukázat, že

  $$\lim_{k\to\infty} (f(x) - T_k^{f,a}(x)) = 0. \qquad (**)$$

  Nyní podle Věty X.5 pro každé $k \in \mathbf{N}$ existuje bod $\xi_k$ mezi $a$ a $x$, pro který platí

  $$f(x) - T_k^{f,a}(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi_k)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}.$$

  (Píšeme $\xi_k$ místo $\xi$, protože pro každé $k$ můžeme dostat jiný bod.)

  Nyní si uvědomme, že z předpokladů věty plyne, že

  $$|f^{(k+1)}(\xi_k)| \leq M, \quad k \in \mathbf{N}. \qquad (***).$$

  Tedy

  $$\left|f(x) - T_k^{f,a}(x)\right| = \frac{|f^{(k+1)}(\xi_k)|}{(k+1)!}|x-a|^{k+1} \overset{(***)}{\leq} \frac{M}{(k+1)!}|x-a|^{k+1}.$$

  Tedy, abychom dokázali $(**)$, stačí dokázat

  $$\lim_{k\to\infty} \frac{M}{(k+1)!}|x-a|^{k+1} = 0 \qquad (\circ)$$

  (a použít větu o policajtech).

Abychom dokázali ($\circ$), spočtěme nejprve

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{M}{(k+2)!}|x-a|^{k+2}}{\frac{M}{(k+1)!}|x-a|^{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x-a|}{k+2} = 0.$$

Nyní podle d'Alembertova podílového kritéria (Věta VII.7) řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{(k+1)!}|x-a|^{k+1}$$

konverguje. Nyní nutná podmínka konvergence (Věta VII.1) říká, že ($\circ$) opravdu platí. Protože z ($\circ$) plyne ($**$), je důkaz hotov.

- Důsledek Věty X.7:

  Tento důsledek říká, že funkce $\exp, \sin, \cos$ jsou v každém bodě $x \in \mathbf{R}$ součtem své Taylorovy řady o středu 0.

  Navíc jsou tyto řady explicitně vypsány.

  To, že Taylorovy řady mají právě tento tvar, plyne z Větičky X.2, kde je uveden tvar Taylorových polynomů.

  Důkaz důsledku:

  - Pro funkce sin a cos:
    Funkce sin a cos jsou třídy $C^\infty$ na $\mathbf{R}$.
    Navíc, pokud $f$ je sin nebo cos a $k \in \mathbf{N}$, pak $f^{(k)}$ je jedna z funkcí $\sin, \cos, -\sin, -\cos$.
    Každopádně $|f^{(k)}(x)| \leq 1$ pro každé $x \in \mathbf{R}$ (a každé $k \in \mathbf{N}$).
    Tedy funkce sin a cos splňují předpoklady Věty X.7 – bereme $a = 0$, $M = 1$ a $r > 0$ libovolné.
    Tedy z Věty X.7 opravdu plyne, že sin a cos jsou v každém bodě $x \in \mathbf{R}$ součtem své Taylorovy řady o středu 0.
  - Pro funkci exp:
    Funkce exp je třídy $C^\infty$ na $\mathbf{R}$ a pro každé $k \in \mathbf{N}$ je $\exp^{(k)} = \exp$.
    Ukažme, jak použít Větu X.7:
    Vezměme $a = 0$ a $r > 0$ libovolné. Protože funkce exp je kladná a rostoucí na $\mathbf{R}$, pro každé $x \in (-r, r)$ platí

    $$|\exp^{(k)} x| = |\exp x| = \exp x \leq \exp r,$$

jsou předpoklady Věty X.7 splněny – stačí vzít $M = \exp r$.

Podle Věty X.7 je tedy funkce exp součtem své Taylorovy řady o středu 0 v každém bodě $x \in (-r, r)$.

Protože $r > 0$ bylo zvoleno libovolně, dostáváme, že funkce exp je součtem své Taylorovy řady o středu 0 v každém bodě $x \in \mathbf{R}$.

- Poznámka: S jistou dávkou námahy lze dokázat, že funkce sinus definovaná jako součet uvedené řady splňuje podmínky z Věty IV.27 o zavedení funkce sinus a čísla $\pi$.

  Takto lze zmíněnou větu dokázat.

  Věta měla dvě části – říkala, že funkce s uvedenými vlastnostmi existuje a navíc je jednoznačně určena.

  Existence se dokáže tak, že funkci definujeme pomocí uvedené řady a ověříme, že má ony vlastnosti (to pořád není úplně snadné).

  Jednoznačnost jsme vlastně právě dokázali. Ze základních vlastností jsme odvozovali další vlastnosti, až nakonec důsledek Věty X.7. To znamená, že funkce sinus je svými základními vlastnostmi opravdu určená jednoznačně – musí být dána součtem uvedené řady.

**K Větě X.8:** Tuto větu dokazovat nebudeme. Nestačí k tomu totiž Věty X.5 a X.7. Je potřeba použít složitější variantu Věty X.5, což už přesahuje rámec Matematiky III. Nicméně vědět, že tato věta platí, se hodí. Zdůrazněme, že vzorce neplatí na celém $\mathbf{R}$, ale jen na intervalu $(-1, 1\rangle$ resp. $(-1, 1)$.

**Poznámka pro zájemce:** *Skutečnost, že funkce $f$ je v bodě $x$ součtem své Taylorovy řady o středu $a$ je charakterizovaná ekvivalencemi $(*)$. Nestačí k tomu, že Taylorova řada konverguje. Může totiž konvergovat k něčemu jinému než k $f(x)$.*

*Standardním příkladem je funkce*

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

*Lze spočítat, že $f$ je třídy $C^\infty$ na $\mathbf{R}$ a pro každé $k \in \mathbf{N}$ je $f^{(k)}(0) = 0$. Proto její Taylorova řada o středu $0$ má všechny členy nulové, tedy konverguje pro každé $x \in \mathbf{R}$ a má součet $0$. Nicméně tento součet se shoduje s funkcí $f$ pouze v bodě $0$, v ostatních bodech má $f$ kladnou hodnotu.*