Komentář k oddílu VIII.4 – integrace racionálních funkcí

Celkové poznámky o smyslu tohoto oddílu:

- Hledání primitivních funkcí je, na rozdíl od počítání derivací, relativně tvůrčí činnost, pro niž nemáme standardní univerzální postup.

- Navíc existují celkem jednoduché funkce, k nimž primitivní funkci spočítat v nějakém pěkném tvaru neumíme. To lze matematicky přesně definovat, říká se tomu, že je nelze vyjádřit *v konečném tvaru*, tedy zhruba řečeno nějakým vzorcem.

  Příkladem takových funkcí jsou například funkce e^{-x^2} na $\mathbf{R}$ nebo funkce $\frac{\sin x}{x}$ na $(0, +\infty)$.

- V tomto oddílu se budeme zabývat racionálními funkcemi (tedy podíly polynomů). Pro ně totiž existuje standardní postup výpočtu primitivní funkce. Tento algoritmus si popíšeme.

- Nejprve si ukážeme nějaké vlastnosti polynomů a nakonec s jejich pomocí popíšeme slibovaný algoritmus.

- Polynomy a priori uvažujeme s komplexními koeficienty, protože to je přirozené a počítání v komplexním oboru se stejně nevyhneme.

K Větě VIII.17 a jejímu Důsledku:

- Dělení polynomů se zbytkem je analogické dělení celých čísel se zbytkem. Zde požadujeme, aby zbytek byl buď nulový nebo měl menší stupeň než dělitel (tj. než Q).

- Důkaz se provede například indukcí podle stupně dělence (tj. P). Protože metoda důkazu je konstruktivní a zároveň dává návod, jak při dělení postupovat, důkaz si provedeme.

- Důkaz existence R a Z:

  – Pokud Q má stupeň 0, pak je to konstantní funkce. Existuje tedy konstanta $c \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, že $Q = c$ na $\mathbf{C}$. Pak stačí zvolit $R = \frac{1}{c} P$ a $Z = 0$.

– Předpokládejme, že Q má stupeň $k > 0$. Pak Q má tvar

$$Q(x) = c_k x^k + c_{k-1} x^{k-1} + \cdots + c_0,$$

kde $c_0, \ldots, c_k \in \mathbf{C}$, $c_k \neq 0$.

Nyní postupujme indukcí podle stupně P:

– První krok: P je nulový nebo stupeň P je menší než k.

Pak stačí vzít $R = 0$ a $Z = P$.

– Druhý krok: Předokládejme, že $n \geq k - 1$ a tvrzení platí, pokud stupeň P je nejvýše roven n (nebo $P = 0$).

Nechť nyní P je polynom stupně $n + 1$, tj.

$$P(x) = a_{n+1} x^{n+1} + a_n x^n + \cdots + a_0,$$

kde $a_0, \ldots, a_{n+1} \in \mathbf{C}$, $a_{n+1} \neq 0$.

Definujme polynom P_1 vzorcem

$$P_1(x) = P(x) - \frac{a_{n+1}}{c_k} x^{n+1-k} Q(x), \quad x \in \mathbf{C}.$$

Protože $c_k \neq 0$ a $n \geq k - 1$ (a tedy $n + 1 - k \geq 0$), je P_1 dobře definovaný polynom.

Navíc má P_1 stupeň nejvýše n (nebo je nulový).

$Q(x)$ je totiž polynom stupně k s koeficientem c_k u x^k, $x^{n+1-k}Q(x)$ je polynom stupně $n + 1$ s koeficientem c_k u x^{n+1} a konečně $\frac{a_{n+1}}{c_k} x^{n+1-k} Q(x)$ je polynom stupně $n + 1$ s koeficientem a_{n+1} u x^{n+1}.

Pokud tento polynom odečteme od P, bude koeficient u x^{n+1} nulový, tedy opravdu P_1 má stupeň nejvýše n (nebo $P_1 = 0$).

Podle indukčního předpokladu použitého na P_1 dostaneme, že existují polynomy R_1 a Z_1, přičemž Z_1 je buď nulový nebo má stupeň menší než k, že

$$P_1(x) = R_1(x) Q(x) + Z_1(x), \quad x \in \mathbf{C}.$$

Pak ovšem dostaneme

$$\begin{aligned}
P(x) &= P_1(x) + \frac{a_{n+1}}{c_k} x^{n+1-k} Q(x) \\
&= R_1(x)Q(x) + Z_1(x) + \frac{a_{n+1}}{c_k} x^{n+1-k} Q(x) \\
&= \left(\underbrace{R_1(x) + \frac{a_{n+1}}{c_k} x^{n+1-k}}_{=R(x)} \right) Q(x) + \underbrace{Z_1(x)}_{=Z(x)}.
\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen.

- Z výše uvedeného postupu je zřejmé, že mají-li P a Q reálné koeficienty, vyjdou i R a Z s reálnými koeficienty (aritmetickými operacemi z reálných čísel vzniknou opět reálná čísla).

- *Jednoznačnost R a Z: Součástí tvrzení věty je i to, že R a Z jsou jednoznačně určené. Pro nás to sice není podstatné, ale je to zajímavé a není to těžké:*

  Předpokládejme, že Q má stupeň k a máme polynomy R_1, Z_1, R_2, Z_2, přičemž každý z polynomů Z_1 a Z_2 je buď nulový nebo má stupeň menší než K a platí

  $$R_1(x)Q(x) + Z_1(x) = R_2(x)Q(x) + Z_2(x), \quad x \in \mathbf{C},$$

  neboli

  $$\underbrace{(R_1(x) - R_2(x))Q(x)}_{=0 \textit{ nebo stupně } \geq k} = \underbrace{Z_2(x) - Z_1(x)}_{=0 \textit{ nebo stupně } < k}, \quad x \in \mathbf{C}.$$

  Pokud $R_1 - R_2$ není nulový polynom, je na levé straně polynom stupně alespoň k. To ovšem není možné, protože napravo je buď nulový polynom nebo polynom stupně menšího než k.

  Jediná možnost je tedy, že $R_1 = R_2$ a $Z_1 = Z_2$. A to je slibovaná jednoznačnost.

- Důsledek snadno plyne z Věty VIII.17:

  Nechť P je polynom a $Q(x) = x - \lambda$, kde $\lambda \in \mathbf{C}$ je nějaké číslo.

Aplikací Věty VIII.17 na P a Q dostaneme, že existují polynomy R a Z, že

$$P(x) = (x - \lambda)R(x) + Z(x), \quad x \in \mathbf{C},$$

přičemž Z je buď nulový nebo má stupeň menší než 1 (což je stupeň Q). To ovšem znamená, že Z je konstantní polynom.

Tj. existuje polynom R a konstanta $c \in \mathbf{C}$, že

$$P(x) = (x - \lambda)R(x) + c, \quad x \in \mathbf{C}.$$

Dosadíme-li speciálně $x = \lambda$, dostaneme

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda)R(\lambda) + c = c,$$

tj. $c = P(\lambda)$, neboli

$$P(x) = (x - \lambda)R(x) + P(\lambda), \quad x \in \mathbf{C}.$$

Nyní je jasné, že v případě, že $P(\lambda) = 0$ (tj. λ je kořenem P), dostaneme

$$P(x) = (x - \lambda)R(x), \quad x \in \mathbf{C},$$

což jsme chtěli.

Z Věty VIII.17 rovněž plyne, že v případě, že P má reálné koeficienty a $\lambda \in \mathbf{R}$, má i R reálné koeficienty.

K Větě VIII.18, následující definici a poznámce:

- Důkaz Věty VIII.18 se provede indukcí podle n s použitím Důsledku Věty VIII.17 a základní věty algebry (Věta I.5):

  Krok 1, $n = 1$: Pokud $n = 1$, pak $P(x) = a_1 x + a_0$, kde $a_0, a_1 \in \mathbf{C}$, $a_1 \neq 0$.

  Máme tedy

  $$P(x) = a_1 x + a_0 = a_1(x + \frac{a_0}{a_1}) = a_1(x - x_1), \text{ kde } x_1 = -\frac{a_0}{a_1.}$$

  Krok 2, $n \to n + 1$: Nechť $n \geq 1$ je takové, že tvrzení platí pro polynomy stupně n.

Nechť
$$P(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + \cdots + a_0$$
je polynom stupně $n+1$ (tj. $a_0, \ldots, a_{n+1} \in \mathbf{C}$, $a_{n+1} \neq 0$).

Protože P je nekonstantní polynom, podle základní věty algebry (Věta I.5) má aspoň jeden komplexní kořen.

Existuje tedy $\lambda \in \mathbf{C}$, že $P(\lambda) = 0$.

Podle Důsledku Věty VIII.17 existuje polynom Q, že
$$P(x) = (x-\lambda)Q(x), \quad x \in \mathbf{C}.$$
Zřejmě Q není nulový, tedy je tvaru
$$Q(x) = c_k x^k + \cdots + c_0,$$
kde $c_0, \ldots, c_k \in \mathbf{C}$ a $c_k \neq 0$.

Protože $(x-\lambda)Q(x)$ je polynom stupně $k+1$ s koeficientem c_k u x^{k+1} (jak se snadno přesvědčíme výpočtem) a zároveň se tento polynom rovná P, dostáváme $k = n$ a $c_k = a_{n+1}$.

Aplikací indukčního předpokladu na Q (což je polynom stupně n) dostaneme, že existují $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{C}$, že
$$Q(x) = a_{n+1}(x-x_1)\ldots(x-x_n), \quad x \in \mathbf{C},$$
tedy
$$P(x) = (x-\lambda)Q(x) = a_{n+1}(x-x_1)\ldots(x-x_n)(x-\lambda), \quad x \in \mathbf{C}.$$
To dokončuje důkaz, stačí vzít $x_{n+1} = \lambda$.

- Pokud P má rozklad jako ve Větě VIII.18, pak $x_1, \ldots, x_n$ jsou všechny kořeny P.

  Na jednu stranu je totiž zřejmé, že pro každé $j \in \{1, \ldots, n\}$ je $P(x_j) = 0$, tedy $x_1, \ldots, x_n$ jsou kořeny.

  Na druhou stranu, pokud x není rovno žádnému z čísel $x_1, \ldots, x_n$, pak $P(x) \neq 0$ (protože $P(x)$ je součinem $n+1$ nenulových čísel), tj. x není kořenem P.

- Některé z kořenů se mohou v seznamu $x_1, \dots, x_n$ opakovat. Počet výskytů kořenu λ v tomto seznamu se rovná násobnosti kořenu λ:

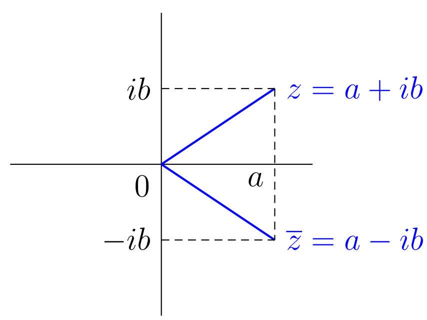
  Dejme tomu, že čísla $x_1, \dots, x_k$ jsou rovna λ a $x_{k+1}, \dots, x_n$ jsou různá od λ. Pak

$$P(x) = (x-\lambda)^k \cdot \underbrace{a_n(x-x_{k+1}) \cdots (x-x_n)}_{R(x)}, \quad x \in \mathbf{C},$$

  a je zřejmé, že R je polynom a $R(\lambda) \neq 0$.

K Větě VIII.19 a komplexně sdruženým číslům:

- Geometricky se komplexně sdružené číslo k z získá osovou souměrností podle reálné osy:



- Z uvedených vlastností komplexně sdružených čísel jsou první a třetí vlastnost zřejmé.

  Druhá vlastnost asi není zřejmá na první pohled, ale snadno se ověří výpočtem

$$\begin{aligned} (a+ib)(c+id) &= ac - bd + i(ad+bc), \\ (a-ib)(c-id) &= ac - bd - i(ad+bc). \end{aligned}$$

- Důkaz Věty VIII.19:

  Nechť P je polynom s reálnými koeficienty, tj.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0,$$

  kde $a_0, \dots, a_n \in \mathbf{R}$. Pak postupně dostaneme:

1. $\overline{P(x)} = P(\overline{x})$, $x \in \mathbf{C}$.

   Počítejme:

$$\begin{aligned}\overline{P(x)} &= \overline{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0} \\ &= \overline{a_n x^n} + \overline{a_{n-1} x^{n-1}} + \cdots + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n} \cdot (\overline{x})^n + \overline{a_{n-1}} \cdot (\overline{x})^{n-1} + \cdots + \overline{a_0} = P(\overline{x}),\end{aligned}$$

   kde ve druhé rovnosti jsme použili první vlastnost komplexně sdružených čísel a ve třetí rovnosti druhou vlastnost.

2. Je-li z kořenem P, je i $\overline{z}$ kořenem.

   Máme-li totiž $P(z) = 0$, pak z prvního bodu vidíme, že

$$P(\overline{z}) = \overline{P(z)} = \overline{0} = 0.$$

3. Nyní dokažme vlastní tvrzení věty. Nechť z je kořenem polynomu P násobnosti k.

   Pak existuje polynom R splňující

$$P(x) = (x - z)^k R(x), \quad x \in \mathbf{C}, \text{ a } R(z) \neq 0.$$

   Z bodu 1 plyne, že pro každé $x \in \mathbf{C}$ platí

$$P(x) = \overline{\overline{P(x)}} = \overline{P(\overline{x})} = \overline{(\overline{x} - z)^k R(\overline{x})} = (\overline{\overline{x} - z})^k \overline{R(\overline{x})} = (x - \overline{z})^k \widetilde{R}(x),$$

   kde

$$\widetilde{R}(x) = \overline{R(\overline{x})}, \quad x \in \mathbf{C}.$$

   Zbývá si uvědomit, že $\widetilde{R}$ je polynom a $\widetilde{R}(\overline{z}) \neq 0$.

   R je polynom, tedy

$$R(x) = c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} \cdots + c_0, \quad x \in \mathbf{C}$$

   pro nějaká $c_0, \ldots, c_m \in \mathbf{C}$. Pak výpočtem podobným jako v bodě 1 dostaneme

$$\widetilde{R}(x) = \overline{R(\overline{x})} = \overline{c_m (\overline{x})^m + c_{m-1} (\overline{x})^{m-1} \cdots + c_0} = \overline{c_m} x^m + \overline{c_{m-1}} x^{m-1} + \cdots + \overline{c_0},$$

   tedy $\widetilde{R}$ je opravdu polynom.

   Nakonec

$$\widetilde{R}(\overline{z}) = \overline{R(z)} \neq 0,$$

   protože $R(z) \neq 0$.

   Tím je důkaz hotov.

K Větě VIII.20:

- Tato věta plyne z Vět VIII.18 a VIII.19. Ukážeme si jak – důkaz je opět konstruktivní, ukazuje, jak rozklad nalézt.

- Nechť tedy P je polynom stupně n s reálnými koeficienty.

  Podle Věty VIII.18 existují čísla $z_1, \ldots, z_n \in \mathbf{C}$, že platí

  $$P(x) = a_n(x - z_1)(x - z_2) \ldots (x - z_n), \quad x \in \mathbf{C}.$$

  Nyní jednotlivé činitele seskupíme. Popíšeme to přesněji:

- Některé z kořenů mohou být reálné, některé mohou být imaginární. Nejprve se budeme zabývat reálnými kořeny.

  Nechť $x_1, \ldots, x_k$ jsou všechny reálné kořeny, přičemž každý uvádíme jen jednou.

  Dále nechť $p_1, \ldots, p_k$ jsou jejich násobnosti.

  To znamená, že číslo x_1 se v seznamu $z_1, \ldots, z_n$ vyskytuje p_1-krát, x_2 se vyskytuje p_2-krát atd.

  Tedy, seskupíme-li příslušné činitele, dostaneme

  $$P(x) = a_n(x-x_1)^{p_1}(x-x_2)^{p_2} \cdots (x-x_k)^{p_k} \cdot \underbrace{(\text{činitele s imaginárními } z_j)}_{\text{polynom bez reálných kořenů}}.$$

- Nyní se podívejme na imaginární kořeny.

  Nechť $y_1, \ldots, y_l$ jsou všechny kořeny s kladnou imaginární částí (tj. ležící nad reálnou osou), přičemž každý uvádíme jen jednou.

  Dále nechť $q_1, \ldots, q_l$ jsou jejich násobnosti.

  Podle Věty VIII.19 jsou i komplexně sdružená čísla $\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_l}$ kořeny polynou P, a to s násobnostmi $q_1, \ldots, q_l$. Tyto kořeny mají zápornou imaginární část, tj. leží pod reálnou osou.

  Tím budou vyčerpány všechny kořeny, a tak po seskupení činitelů dostaneme

  $$P(x) = a_n(x - x_1)^{p_1}(x - x_2)^{p_2} \cdots (x - x_k)^{p_k} \\ \cdot (x-y_1)^{q_1}(x-\overline{y_1})^{q_1}(x-y_2)^{q_2}(x-\overline{y_2})^{q_2} \ldots (x-y_l)^{q_l}(x-\overline{y_l})^{q_l}$$

Zbývá poslední krok – roznásobit činitele příslušné komplexně sdruženým kořenům:

Pokud $y_j = a_j + ib_j$ (kde $a_j, b_j \in \mathbf{R}$ a $b_j > 0$), pak $\overline{y_j} = a_j - ib_j$. Potom máme

$$\begin{aligned}(x-y_j)^{q_j}(x-\overline{y_j})^{q_j} &= ((x-y_j)(x-\overline{y_j}))^{q_j} = (x^2-(y_j+\overline{y_j})x+y_j\overline{y_j})^{q_j}\\ &= (x^2 \underbrace{-2a_j}_{\alpha_j} x + \underbrace{a_j^2+b_j^2}_{\beta_j})^{q_j}.\end{aligned}$$

Položíme-li $\alpha_j = -2a_j$ a $\beta_j = a_j^2 + b_j^2$, dostaneme rozklad ve slibovaném tvaru.

K Větě VIII.21:

- Předpoklady této věty říkají, že P a Q jsou dva polynomy s reálnými koeficienty, stupeň P je menší než stupeň Q a polynom Q máme rozložený způsobem popsaným ve Větě VIII.20.
- Za uvedených předpokladů věta říká, že racionální funkci $\frac{P}{Q}$ lze vyjádřit jako součet uvedeného tvaru. (Jednotlivým sčítancům se říká „parciální zlomky“.)

  Vzorec na pravé straně vypadá možná složitě, ale ve skutečnosti složitý není. Každému z činitelů v rozkladu polynomu Q odpovídá jedna skupina zlomků na pravé straně podle následujícího klíče:

  – Pokud se v rozkladu vyskytuje činitel $(x-\lambda)^p$ (tj., λ je reálný kořen násobnosti p), pak mu napravo odpovídá skupina p zlomků

  $$\frac{A_1}{x-\lambda} + \frac{A_2}{(x-\lambda)^2} + \cdots + \frac{A_p}{(x-\lambda)^p}.$$

  Speciálně, pokud $p = 1$, tj. λ je kořen násobnosti 1, pak příslušná skupina má jenom jeden člen $\frac{A}{x-\lambda}$.

  – Pokud se v rozkladu vyskytuje činitel $(x^2+\alpha x+\beta)^q$ (odpovídající dvojici komplexně sdružených imaginarních kořenů násobnosti q), pak mu napravo odpovídá skupina q zlomků

  $$\frac{B_1x+C_1}{x^2+\alpha x+\beta} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+\alpha x+\beta)^2} + \cdots + \frac{B_qx+C_q}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}.$$

Speciálně, pokud $q = 1$, tj. ony kořeny jsou násobnosti 1, pak příslušná skupina má jenom jeden člen $\frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta}$.

- Věta říká, že rozklad uvedeného typu existuje a navíc je jednoznačně určen.

  Důkaz této věty provádět nebudeme. Je například snadným důsledkem pokročilejších vět z komplexní analýzy.

  Jiný způsob důkazu vychází z možného způsobu hledání rozkladu, a proto ho částečně popíšeme:

  Na rovnost v tvrzení věty se můžeme dívat jako na rovnici s neznámými A_j^i, B_j^i, C_j^i.

  Řešíme ji tak, že nejprve zlomky na pravé straně převedeme na společného jmenovatele.

  Tak napravo dostaneme racionální funkci, která ve jmenovateli má polynom $\frac{1}{a_n}Q$ a v čitateli nějaký polynom stupně menšího než Q.

  Uvědomme si, že stupeň Q se rovná $n = p_1 + \cdots + p_k + 2(q_1 + \cdots + q_l)$ a v čitateli opravdu dostaneme polynom stupně nejvýše $n - 1$.

  Nyní rovnici vynásobíme $Q(x)$. Pak nalevo bude $P(x)$ (což je polynom stupně nejvýše $n - 1$) a napravo bude nějaký polynom stupně nejvýše $n - 1$.

  Mají-li se tyto polynomy rovnat, musejí mít stejné koeficienty. Porovnáním koeficientů dostaneme soustavu n rovnic (polynom stupně nejvýše $n - 1$ má n koeficientů a pro každý z nich dostaneme jednu rovnici) s neznámými A_j^i, B_j^i, C_j^i.

  Neznámých je rovněž n. Lze ukázat, že matice výsledné soustavy je regulární, a tedy má soustava právě jedno řešení.

  Důkaz provádět nebudemne, ale uvedený postup dává návod, jak v konkrétních případech rozklad najít.

Algoritmus pro výpočet primitivní funkce k funkci racionální.

Nechť $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P a Q jsou polynomy s reálnými koeficienty, přičemž polynom Q není konstantní nulová funkce.

Budeme předpokládat, že ani P není konstantní nulová funkce (jinak je úloha triviální).

Krok 1, vydělení polynomů: Najdeme polynomy R a Z takové, že $P(x) = R(x)Q(x) + Z(x)$, přičemž Z je buď nulový nebo má stupeň menší než je stupeň Q. Že je to možné, říká Věta VIII.18 a její důkaz zároveň dává návod k výpočtu.

Pak máme

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{Z(x)}{Q(x)}.$$

R je polynom, takže primitivní funkci najdeme snadno.

Zbývá najít primitivní funkci k $\frac{Z(x)}{Q(x)}$, čemuž se budou věnovat další kroky.

Poznámka: Pokud stupeň P je menší než stupeň Q, tento krok můžeme přeskočit (je $R = 0$ a $Z = P$).

Krok 2, rozklad polynomu ve jmenovateli: Najdeme rozklad polynomu Q uvedený ve Větě VIII.20.

To je snadné za předpokladu, že umíme najít všechny kořeny polynomu Q – pak postupujeme podle důkazu Věty VIII.20.

Najít kořeny polynomu Q ovšem může být obtížné až nemožné (pro rovnice vyššího řádu neexistuje obecný vzorec), takže toto je limit použitelnosti metody pro praktické počítání.

Krok 3, rozklad na parciální zlomky: Najdeme rozklad funkce $\frac{Z(x)}{Q(x)}$ tvaru popsaného ve Větě VIII.21, tj. „na parciální zlomky". Postup byl naznačen u zmíněné věty, je třeba vyřešit příslušnou soustavu rovnic.

Krok 4, integrace parciálních zlomků: Najdeme primitivní funkci ke každému z parciálních zlomků.

To lze udělat s využitím následujících vzorců a postupů:

- Je-li $\lambda \in \mathbf{R}$, pak $\int \frac{1}{x-\lambda}\,dx \stackrel{c}{=} \log|x-\lambda|$ na $(-\infty, \lambda)$ a na $(\lambda, +\infty)$.
  To plyne z kombinace Větičky VIII.11(3) a Věty VIII.13, nebo prostě ze známých pravidel derivování.
- Je-li $\lambda \in \mathbf{R}$ a $m > 1$, pak $\int \frac{1}{(x-\lambda)^m}\,dx \stackrel{c}{=} -\frac{1}{(m-1)(x-\lambda)^{m-1}}$ na $(-\infty, \lambda)$ a na $(\lambda, +\infty)$.
  To plyne z kombinace Větičky VIII.11(2) a Věty VIII.13, nebo prostě ze známých pravidel derivování.

- Zlomek $\frac{Cx+D}{(x^2+\alpha x+\beta)^m}$ si nejprve rozložíme na dva zlomky ještě „parciálnější“, a to takto:

$$\frac{Cx+D}{(x^2+\alpha x+\beta)^m} = a \cdot \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^m} + \frac{b}{(x^2+\alpha x+\beta)^m},$$

  kde a, b jsou vhodná reálná čísla.

  To ovšem je snadné – je vidět, že lze vzít $a = \frac{C}{2}$ a pak $b = D - a \cdot \alpha$.

  Nyní najdeme primitivní funkci ke každému ze dvou zlomků na pravé straně.

- Pro první zlomek je to snadné, protože čitatel (tj. $2x+\alpha$) je derivací funkce $x^2+\alpha x+\beta$. (To bylo účelem rozkladu v předchozím bodě.)

  Proto platí

$$\int \frac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\beta}\, dx \stackrel{c}{=} \log(x^2+\alpha x+\beta), \quad x \in \mathbf{R}$$

  a pro $m > 1$

$$\int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^m}\, dx \stackrel{c}{=} \frac{-1}{(m-1)(x^2+\alpha x+\beta)^{m-1}}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

  To plyne opět kombinací Větičky VIII.11 a Věty VIII.13, nebo též z pravidel pro počítání derivací.

- Druhý zlomek je složitější. Upravíme si ho „doplněním na čtverec“ – uvědomme si, že kvadratická funkce $x^2+\alpha x+\beta$ nemá reálné kořeny.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^m} &= \frac{1}{(x^2+2\cdot x\cdot\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{4}-\frac{\alpha^2}{4}+\beta)^m} \\
&= \frac{1}{((x+\frac{\alpha}{2})^2+\underbrace{\beta-\frac{\alpha^2}{4}}_{\gamma})^m} = \frac{1}{(\gamma\cdot(\frac{1}{\gamma}(x+\frac{\alpha}{2})^2+1))^m} \\
&= \frac{1}{\gamma^m((\frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\gamma}})^2+1)^m} = \frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma^m}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{\gamma}}}{((\frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\gamma}})^2+1)^m}
\end{aligned}$$

Smyslem těchto úprav bylo vyjádřit zlomek ve tvaru

$$\frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^m} = f(\varphi(x))\varphi'(x),$$

kde

$$f(y) = \frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma^m}\cdot\frac{1}{(y^2+1)^m},\ \varphi(x) = \frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\gamma}}\ (\text{a } \varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}).$$

Díky Větě VIII.13 tedy stačí spočítat primitivní funkci k funkci $\frac{1}{(y^2+1)^m}$.

- Jest

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx \overset{c}{=} \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbf{R}$$

(viz Větička VIII.11, nebo prostě víme, jaká je derivace funkce arctg).

Dále máme

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2+1)^m}\,dx &\underset{\substack{u'(x)=1 \quad v(x)=\frac{1}{(x^2+1)^m} \\ u(x)=x \quad v'(x)=\frac{-m\cdot 2x}{(x^2+1)^{m+1}}}}{=} \frac{x}{(x^2+1)^m} - \int \frac{x\cdot(-m)\cdot 2x}{(x^2+1)^{m+1}}\,dx \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^m} + 2m\int \frac{x^2}{(x^2+1)^{m+1}}\,dx \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^m} + 2m\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{m+1}}\,dx \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^m} + 2m\int \frac{1}{(x^2+1)^m}\,dx - 2m\int \frac{1}{(x^2+1)^{m+1}}\,dx,
\end{aligned}$$

tedy po úpravě

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^{m+1}}\,dx = \frac{x}{2m(x^2+1)^m} + \frac{2m-1}{2m}\int \frac{1}{(x^2+1)^m}\,dx.$$

Protože pro $m=1$ primitivní funkci spočítat umíme (viz výše), pomocí tohoto rekurentního (induktivního) vzorce ji spočítáme pro každé m

Krok 5, závěr: Spočítáme-li primitivní funkce ke všem parciálním zlomkům, pak výsledná primitivní funkce bude rovna součtu těchto funkcí.

Nakonec určíme intervaly, na kterých výsledek platí. Z postupu je vidět, že je třeba vyloučit reálné kořeny polynomu Q.

Tedy vezmeme množinu $\mathbf{R}\setminus$(reálné kořeny Q). Tato množina je tvořena několika otevřenými intervaly. Výsledek platí na každém z těchto intervalů (na každém zvlášť, byť výpočet byl stejný).