Komentář k oddílu IX.4 - kvadratické formy

K základním pojmům a smyslu tohoto oddílu:

- Kvadratické formy jsou speciální funkce více proměnných.

  Kvadratická forma na $\mathbf{R}^n$ je funkce definovaná vzorcem

  $$Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \mathbb{A} \boldsymbol{x} =< \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} >, \qquad (*)$$

  kde $\mathbb{A}$ je symetrická čtvercová matice řádu n.

  Se symetrickými maticemi jsme se setkali již v komentáři k oddílu VI.1. Čtvercová matice $\mathbb{A} = (a_{ij})$ řádu n je symetrická, pokud $\mathbb{A}^T = \mathbb{A}$, neboli $a_{ji} = a_{ij}$ pro každou volbu $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Geometricky to lze vyjádřit jako symetrii podle hlavní diagonály.

  Vysvětleme si vzorec $(*)$: Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ v něm chápeme jako sloupcový vektor, tj. matici typu $n \times 1$. Pak $\boldsymbol{x}^T$ je matice typu $1 \times n$, tj. řádkový vektor. Proto $\boldsymbol{x}^T \mathbb{A} \boldsymbol{x}$ je matice typu 1×1, tedy vlastně číslo:

  $$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\boldsymbol{x}^T}_{1\times n} \cdot \underbrace{\mathbb{A}}_{n\times n}}_{1\times n} \cdot \underbrace{\boldsymbol{x}}_{n\times 1}}_{1\times 1}$$

  Druhý vzorec v $(*)$ dává totéž, co první vzorec, protože z definice maticového násobení a skalárního součinu plyne rovnost

  $$< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >= \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{x},$$

  pokud $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ chápeme jako sloupcové vektory.

- Pokud $n = 1$, pak čtvercová matice $\mathbb{A}$ řádu 1 je tvořena jediným číslem, nazvěme ho a. Příslušná kvadratická forma je pak dána vzorcem

  $$Q(x) = ax^2, \quad x \in \mathbf{R}.$$

- Pokud $n = 2$, pak symetrická matice řádu 2 má tvar

  $$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \qquad \text{kde } a, b, c \in \mathbf{R}.$$

  Příslušná kvadratická forma je pak dána vzorcem

  $$Q(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax + by \\ bx + cy \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

- Obecně, pokud $\mathbb{A} = (a_{ij})$ je symetrická matice řádu n, pak z definice maticového násobení spočítáme, že příslušná kvadratická forma má tvar

$$Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \mathbb{A} \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_i x_j.$$

  V poslední rovnosti jsme použili symetrii matice $\mathbb{A}$, tj. rovnost $a_{ij} = a_{ji}$.

  Z tohoto vzorce je vidět, že reprezentující matice kvadratické formy je určena jednoznačně.

  Zároveň je názorné, proč mluvíme o **kvadratické** formě. V jiné terminologii se takové funkce nazývají *homogenní polynomy n proměnných stupně* 2. Přitom slovem polynom n proměnných rozumíme funkci n proměnných, která vznikne ze souřadnicových funkcí pomocí násobení a sčítání – tj. dá se vyjádřit jako součet funkcí tvaru $cx_{i_1} \dots x_{i_k}$, jde $c \in \mathbf{R}$ a $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$. Stupeň 2 znamená, že stupeň každého ze sčítanců je nejvýše 2 (ten stupeň je roven k), a homogenní znamená, že stupeň každého ze sčítanců je přesně 2 (tj. máme jen sčítance tvaru $cx_i x_j$ – přičemž může být $i = j$ nebo $i \neq j$).

- Proč se zabývat kvadratickými formami: Vyskytují se přirozeně při zkoumání lokálních extrémů, uvidíme v kapitole XI.

- Kromě kvadratických forem se zkoumají i lineární formy (tj. lineární zobrazení $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ – ty jsou reprezentované řádkovým vektorem) i formy vyšších řádů (*homogenní polynomy n proměnných stupně k*). Formy vyšších řádů ovšem pro nás nebudou důležité, takže se jimi zabývat nebudeme.

- Kvadratická forma Q splňuje rovnost

$$Q(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha^2 Q(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n, \alpha \in \mathbf{R}.$$

  To je zřejmé z definice a z vlastností maticového násobení:

$$Q(\alpha \boldsymbol{x}) = (\alpha \boldsymbol{x})^T \mathbb{A} (\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha \cdot (\alpha \boldsymbol{x}^T) \mathbb{A} \boldsymbol{x} = \alpha^2 \cdot \boldsymbol{x}^T \mathbb{A} \boldsymbol{x} = \alpha^2 Q(\boldsymbol{x}).$$

Povaha aneb definitnost kvadratické formy:

- Kvadratická forma Q je *pozitivně semidefinitní*, pokud nabývá pouze nezáporných hodnot.

  Podobně je Q *negativně semidefinitní*, pokud nabývá pouze nekladných hodnot.

  To znamená, že pro tuto situaci zavádíme zvláštní pojmy. Jsou to zavedené pojmy a jejich opodstatnění okomentujeme ještě níže.

- Dále se definují ostré (striktní) varianty těchto pojmů. Protože $Q(\boldsymbol{o}) = 0$, nemůže být kvadratická forma všude kladná ani všude záporná.

  Proto se definuje, že Q je *pozitivně definitní*, pokud je kladná všude, kde být kladná může, tj. v každém bodě s výjimkou počátku. To je význam podmínky, že $Q(\boldsymbol{x}) > 0$ pro $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \setminus \{\boldsymbol{o}\}$.

  Podobně, Q je *negativně definitní*, pokud je záporná všude, kde být záporná může, tj. v každém bodě s výjimkou počátku. Tj. $Q(\boldsymbol{x}) < 0$ pro $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \setminus \{\boldsymbol{o}\}$.

- Nakonec Q je *indefinitní*, pokud nabývá kladných i záporných hodnot, tedy není ani pozitivně semidefinitní ani negativně semidefinitní.

- Protože každá kvadratická forma je dána nějakou symetrickou maticí, pak říkáme-li, že daná matice má nějakou z uvedených vlastností, pak tím myslíme, že ji má příslušná kvadratická forma.

  Tak například symetrická matice $\mathbb{A}$ řádu n je pozitivně semidefinitní, pokud
  $$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n : \boldsymbol{x}^T \mathbb{A} \boldsymbol{x} \geq 0.$$
  Atd.

  Tato konvence ospravedlňuje zavedení nové terminologie.

- Větička IX.11:

  Diagonální matice známe už z komentářů k oddílu VI.1.

  Pokud $\mathbb{A} = (a_{ij})$ je diagonální matice řádu n, pak prvky mimo diagonálu jsou nulové (tj. $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$). Tedy příslušná kvadratická forma má tvar
  $$\boldsymbol{x}^T \mathbb{A} \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n. \tag{$**$}$$

Z toho již plyne tvrzení věty:

- Nejdřív si uvědomme, že pokud $\boldsymbol{e}^i$ je i-tý kanonický bázový vektor (který má na i-tém místě jedničku a jinde nuly), pak platí

$$(\boldsymbol{e}^i)^T \mathbb{A} \boldsymbol{e}^i = a_{ii}.$$

- Pokud $\mathbb{A}$ je pozitivně semidefinitní, pak pro každé i speciálně platí, že

$$0 \leq (\boldsymbol{e}^i)^T \mathbb{A} \boldsymbol{e}^i = a_{ii}.$$

  Obráceně, pokud $a_{ii} \geq 0$ pro všechna i, pak z $(**)$ plyne, že $\mathbb{A}$ je pozivně semidefinitní.

- Podobně, pokud $\mathbb{A}$ je pozitivně definitní, pak pro každé i speciálně platí, že

$$0 < (\boldsymbol{e}^i)^T \mathbb{A} \boldsymbol{e}^i = a_{ii}.$$

  Obráceně, pokud $a_{ii} > 0$ pro všechna i, pak z $(**)$ plyne, že $\mathbb{A}$ je pozitivně definitní (kvadratická forma je nezáporná a jediný případ, kdy vyjde nula, je nulový vektor).

- Analogicky se ukáže ekvivalence pro negativně semidefinitní a negativně definitní případ.

- Nakonec, $\mathbb{A}$ je indefinitní, právě když není ani pozitivně semidefinitní ani negativně semidefinitní.

  Tj., právě když není pravda, že všechna a_{ii} jsou nezáporná, ani, že jsou všechna nekladná.

  Tj. právě když některé je záporné a některé je kladné.

K symetrickým úpravám:

- Vyšetřování povahy (definitnosti) kvadratických forem je důležité třeba při zkoumání lokálních extrémů funkcí více proměnných, jak uvidíme v kapitole XI.

  Proto si ukážeme metodu, jak vyšetřování provést. Jednu součást metody už máme – případ diagonální matice. Dále si ukážeme, jak vyšetření obecné symetrické matice převést na vyšetřování diagonální matice.

- Elementární řádkové úpravy byly definovány v oddíle VI.2, stejně tak elementární sloupcové úpravy (viz zejména komentář k oddílu VI.2).

  Nyní symetrická úprava je řádková úprava následována příslušnou sloupcovou úpravou. Je snad zřejmé, co se myslí „příslušnou sloupcovou úpravou".

  Například, pokud máme řádkovou úpravu, která spočívá ve vynásobení i-tého řádku číslem λ, pak příslušná sloupcová úprava je vynásobení i-tého sloupce číslem λ.

  Pokud máme řádkovou úpravu, která spočívá v prohození i-tého a j-tého řádku, pak příslušná sloupcová úprava je prohození i-tého a j-tého sloupce.

  Nakonec, pokud máme řádkovou úpravu, která spočívá v přičtení λ-násobku i-tého řáku k j-tému řádku, pak příslušná sloupcová úprava je přičtení λ-násobku i-tého sloupce k j-tému sloupci.

  Podobně jako (řádková) transformace je konečná posloupnost řádkových úprav, sloupcová transformace je konečná posloupnost sloupcových úprav, symetrickou transformaci definujeme jako konečnou posloupnost symetrických úprav.

  Symetrická transformace má smysl jen pro čtvercové matice (aby ke každé řádkové úpravě existovala příslušná sloupcová, musí být počet sloupců stejný jako počet řádků).

- Lemma IX.12: Toto lemma se týká pouze řádkové transformace. Jeho myšlenky se používaly již v kapitole VI.

  Důkaz: Nechť T je transfomace matic o m řádcích.

  Uvažme jednotovkou matici $\mathbb{I}$ řádu m. Aplikujme na ni transformaci T a výslednou matici označme $\mathbb{B}$.

  Pak $\mathbb{B}$ je regulární matice řádu m. (Transformace zachovává hodnost a regularita znamená hodnost m.)

  Ukážeme, že $\mathbb{B}$ je hledaná matice.

  Nechť tedy $\mathbb{A}$ je matice typu $m \times n$ a matice $\mathbb{A}'$ z ní vznikne aplikací transformace T.

Protože $\mathbb{I}\mathbb{A} = \mathbb{A}$, podle Věty VI.6 (o transformaci a součinu) dostáváme $\mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{A}'$, schematicky

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{I} & \cdot & \mathbb{A} = & \mathbb{A} \\ T\Big\downarrow & & & \Big\downarrow T \\ \mathbb{B} & \cdot & \mathbb{A} = & \mathbb{A}'. \end{array}$$

A to je ono.

- Věta IX.13: Tato věta je důsledkem Lemmatu IX.12. Ale důkaz uděláme ve dvou krocích:

  Krok 1: T je jedna symetrická úprava:

  Nechť R je nějaká řádková úprava, S jí příslušná sloupcová úprava a T spočívá v provedení R a následně S.

  Protože R je transformace, nechť $\mathbb{B}$ je regulární matice z Lemmatu IX.12.

  Nyní se podívejme, jaký má vztah k sloupcové úpravě S. Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n. Provést sloupcovou úpravu S na $\mathbb{A}$ znamená totéž, jako provést řádkovou úpravu na transponovanou matici $\mathbb{A}^T$ a k ní vzít transponovanou matici. Schematicky:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \xrightarrow{S} & \mathbb{A}' \\ \text{transponujeme}\Big\downarrow & & \Big\uparrow\text{transponujeme} \\ \mathbb{A}^T & \xrightarrow{R} & \mathbb{B}\mathbb{A}^T \end{array}$$

  Tedy, provést sloupcovou úpravu S na matici $\mathbb{A}$ je totéž, jako nejprve matici transponovat, pak provést řádkovou úpravu R a výslednou matici opět trasponovat.

  Protože provést řádkovou úpravu R znamená matici zleva vynásobit maticí $\mathbb{B}$ (tak byla zvolena), dostaneme ve výše uvedeném diagramu, že

$$\mathbb{A}' = (\mathbb{B}\mathbb{A}^T)^T = \mathbb{A}\mathbb{B}^T.$$

  Tj., provést sloupcovou úpravu S znamená matici vynásobit zprava maticí $\mathbb{B}^T$.

Nyní to shrňme: Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n. Pak aplikace T probíhá ve dvou krocích:

$$\mathbb{A} \xrightarrow{R} \mathbb{B}\mathbb{A} \xrightarrow{S} \mathbb{B}\mathbb{A}\mathbb{B}^T.$$

A to je ono.

Krok 2: T je obecná symetrická transformace.

Pak T je konečná posloupnost symetrických úprav, řekněme

$$T_1, \ldots, T_m.$$

Podle Kroku 1 víme, že pro jednotlivé symetrické úpravy (tedy i pro každé T_j) tvrzení platí. Máme tedy příslušné regulární matice

$$\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_m.$$

Tedy, máme-li matici čtvercovou $\mathbb{A}$ řádu n, pak aplikovat na ni T znamená postupně aplikovat $T_1, \ldots, T_m$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A} \arrow[r, "T_1"] \arrow[rrrrr, bend right, "T"'] & \mathbb{B}_1\mathbb{A}\mathbb{B}_1^T \arrow[r, "T_2"] & \mathbb{B}_2\mathbb{B}_1\mathbb{A}\mathbb{B}_1^T\mathbb{B}_2^T \arrow[r, "T_3"] & \cdots \arrow[r, "T_m"] & \mathbb{B}_m \ldots \mathbb{B}_2\mathbb{B}_1\mathbb{A}\mathbb{B}_1^T\mathbb{B}_2^T \ldots \mathbb{B}_m^T & {}
\end{tikzcd}$$

Tedy, aplikací T na $\mathbb{A}$ vznikne matice

$$\mathbb{B}_m \ldots \mathbb{B}_2\mathbb{B}_1\mathbb{A}\mathbb{B}_1^T\mathbb{B}_2^T \ldots \mathbb{B}_m^T = (\mathbb{B}_m \ldots \mathbb{B}_2\mathbb{B}_1)\mathbb{A}(\mathbb{B}_m \ldots \mathbb{B}_2\mathbb{B}_1)^T.$$

Stačí tedy zvolit

$$\mathbb{B} = \mathbb{B}_m \ldots \mathbb{B}_2\mathbb{B}_1,$$

což je regulární matice (podle Věty VI.4).

- Z Věty IX.13 a z asociativity maticového násobení plynou následující postřehy:
  - Symetrická úprava je definovaná tak, že uděláme nejprve řádkovou úpravu a následně příslušnou sloupcovou úpravu.

    Pokud bychom postupovali v opačném pořadí, tedy nejprve provedli sloupcovou úpravu a následně řádkovou úpravu, výsledek bude týž. To proto, že

    $$(\mathbb{B}\mathbb{A})\mathbb{B}^T = \mathbb{B}(\mathbb{A}\mathbb{B}^T).$$

- Symetrická transformace je definována jako konečná posloupnost symetrických úprav.

  Ale vyjde to nastejno, jako bychom nejprve provedli řádkovou transformaci a následně odpovídají sloupcovou transformaci. Nebo obráceně – nejprve sloupcovou transformaci a následně odpovídající řádkovou transformaci.

- Lemma IX.14: Pokud aplikujeme symetrickou transformaci na symetrickou matici, dostaneme opět symetrickou matici.

  To plyne snadno z Věty IX.13. Pokud totiž na matici $\mathbb{A}$ aplikujeme symetrickou transformaci, dostaneme matici tvaru $\mathbb{B}\mathbb{A}\mathbb{B}^T$, přičemž

  $$(\mathbb{B}\mathbb{A}\mathbb{B}^T)^T = (\mathbb{B}^T)^T\mathbb{A}^T\mathbb{B}^T = \mathbb{B}\mathbb{A}\mathbb{B}^T.$$

  Tyto rovnosti plynou z vlastností transponovaných matic (Věta VI.3) a předpokladu, že $\mathbb{A}$ je symetrická.

K Větě IX.15:

- Tato věta říká, že symetrická transformace nemění povahu (definitnost) matice. Bude důležitá pro postup vyšetřování matic.

- Důkaz: Nechť $\mathbb{A}$ je symetrická matice řádu n a matice $\mathbb{B}$ z matice $\mathbb{A}$ vznikla nějakou symetrickou transformací.

  Chceme ukázat, že tyto dvě matice mají stejnou povahu (definitnost). Tato povaha je definována pomocí povahy příslušné kvadratické formy.

  Označme tedy Q_A a Q_B příslušné kvadratické formy, tj.

  $$Q_A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\mathbb{A}\boldsymbol{x} \quad \text{a} \quad Q_B(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\mathbb{B}\boldsymbol{x} \quad \text{pro } \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n.$$

  Dále použijeme Větu IX.13 – podle ní existuje regulární matice $\mathbb{C}$ řádu n, že platí

  $$\mathbb{B} = \mathbb{C}\mathbb{A}\mathbb{C}^T. \qquad (\circ)$$

  Protože $\mathbb{C}$ je regulární, existuje k ní inverzní matice $\mathbb{C}^{-1}$. Pak i transponovaná matice $\mathbb{C}^T$ je regulární a $(\mathbb{C}^T)^{-1} = (\mathbb{C}^{-1})^T$ (viz Věta VI.4). Tedy z $(\circ)$ plyne, že

  $$\mathbb{A} = \mathbb{C}^{-1}\mathbb{B}(\mathbb{C}^{-1})^T. \qquad (\circ\circ)$$

S pomocí vztahů (∘) a (∘∘) nyní odvodíme vztah mezi kvadratickými formami Q_A a Q_B:

$$Q_B(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \mathbb{B} \boldsymbol{x} \overset{(\circ)}{=} \boldsymbol{x}^T \mathbb{C}\mathbb{A}\mathbb{C}^T \boldsymbol{x} = (\mathbb{C}^T \boldsymbol{x})^T \mathbb{A} (\mathbb{C}^T \boldsymbol{x}) = Q_A(\mathbb{C}^T \boldsymbol{x}),$$

$$Q_A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \mathbb{A} \boldsymbol{x} \overset{(\circ\circ)}{=} \boldsymbol{x}^T \mathbb{C}^{-1} \mathbb{B} (\mathbb{C}^{-1})^T \boldsymbol{x} = ((\mathbb{C}^{-1})^T \boldsymbol{x})^T \mathbb{A} ((\mathbb{C}^{-1})^T \boldsymbol{x}) = Q_B((\mathbb{C}^{-1})^T \boldsymbol{x}).$$

Tedy

$$Q_B(\boldsymbol{x}) = Q_A(\mathbb{C}^T \boldsymbol{x}) \quad \text{a} \quad Q_A(\boldsymbol{x}) = Q_B((\mathbb{C}^{-1})^T \boldsymbol{x}) \quad \text{pro } \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n. \quad (\square)$$

Nyní už je zbytek důkazu snadný:

$\mathbb{A}$ je PSD $\Rightarrow$ $\mathbb{B}$ je PSD: Nechť $\mathbb{A}$ je PSD. To znamená, že kvadratická forma Q_A je nezáporná.

Pak ovšem pro $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ platí

$$Q_B(\boldsymbol{x}) \overset{(\square)}{=} Q_A(\mathbb{C}^T \boldsymbol{x}) \geq 0.$$

Tedy Q_B je nezáporná, a tedy $\mathbb{B}$ je PSD.

$\mathbb{B}$ je PSD $\Rightarrow$ $\mathbb{A}$ je PSD: Nechť $\mathbb{B}$ je PSD. To znamená, že kvadratická forma Q_B je nezáporná.

Pak ovšem pro $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ platí

$$Q_A(\boldsymbol{x}) \overset{(\square)}{=} Q_B((\mathbb{C}^{-1})^T \boldsymbol{x}) \geq 0.$$

Tedy Q_A je nezáporná, a tedy $\mathbb{A}$ je PSD.

$\mathbb{A}$ je PD $\Rightarrow$ $\mathbb{B}$ je PD: Nechť $\mathbb{A}$ je PD. Pak je také PSD, a tedy podle již dokázané části je $\mathbb{B}$ také PSD.

Zbývá dokázat, že Q_B je opravdu PD, nejen PSD, tj., že $Q_B(\boldsymbol{x}) = 0$ jen pro $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$:

Nechť $Q_B(\boldsymbol{x}) = 0$. Podle ($\square$) dostáváme, že $Q_A(\mathbb{C}^T \boldsymbol{x}) = 0$.

Protože $\mathbb{A}$ je PD, plyne z toho, že $\mathbb{C}^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$.

Protože matice $\mathbb{C}^T$ je regulární, dostaneme, že $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ (například z Věty VI.15, nebo přímo $\boldsymbol{x} = (\mathbb{C}^{-1})^T \mathbb{C}^T \boldsymbol{x} = (\mathbb{C}^{-1})^T \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$).

Tím je důkaz hotov.

$\mathbb{B}$ je PD $\Rightarrow$ $\mathbb{A}$ je PD: Nechť $\mathbb{B}$ je PD. Pak je také PSD, a tedy podle již dokázané části je $\mathbb{A}$ také PSD.

Zbývá dokázat, že Q_A je opravdu PD, nejen PSD, tj., že $Q_A(\boldsymbol{x}) = 0$ jen pro $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$:

Nechť $Q_A(\boldsymbol{x}) = 0$. Podle ($\square$) dostáváme, že $Q_B((\mathbb{C}^{-1})^T\boldsymbol{x}) = 0$.

Protože $\mathbb{B}$ je PD, plyne z toho, že $(\mathbb{C}^{-1})^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$.

Protože matice $(\mathbb{C}^{-1})^T$ je regulární, dostaneme, že $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ (například z Věty VI.15, nebo přímo $\boldsymbol{x} = \mathbb{C}^T(\mathbb{C}^{-1})^T\boldsymbol{x} = \mathbb{C}^T\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$).

Tím je důkaz hotov.

Ekvivalence

$$\mathbb{A} \text{ je NSD} \Leftrightarrow \mathbb{B} \text{ je NSD}, \qquad \mathbb{A} \text{ je ND} \Leftrightarrow \mathbb{B} \text{ je ND}$$

se ukážou zcela analogicky.

Zbývající ekvialence

$$\mathbb{A} \text{ je ID} \Leftrightarrow \mathbb{B} \text{ je ID}$$

plyne z předchozích ekvivalencí:

$$\mathbb{A} \text{ je ID} \Leftrightarrow \mathbb{A} \text{ není PSD ani NSD} \Leftrightarrow \mathbb{B} \text{ není PSD ani NSD} \Leftrightarrow \mathbb{B} \text{ je ID.}$$

První a třetí ekvivalence plynou z definic, druhá pak z již dokázaných případů.

Tím je dokončen celý důkaz.

K Větě IX.16:

- Tato věta říká, že každou symetrickou matici lze pomocí symetrické transformace – tj. pomocí konečné posloupnosti symetrických úprav – převést na diagonální.

  Je to zbývající krok k algoritmu vyšetřování povahy (definitnosti) symetrických matic, jak zdůrazníme ještě níže.

  Je to také analogie věty o převodu matice na schodovitou, která se používala při určování hodnosti, výpočtu determinantu, výpočtu inverzní matice či při řešení soustav rovnic.

- Důkaz je opět konstruktivní, tedy dává zároveň návod, jak převod provést.

  Důkaz si tedy vysvětlíme, provede se matematickou indukcí podle řádu matice.

  Krok 1, $n = 1$: Máme-li matici řádu 1 (tj. typu 1×1), je už diagonální a není třeba provádět žádné úpravy.

  Krok 2, $n \to n+1$: Předpokládejme, že $n \in \mathbf{N}$ a tvrzení platí pro n (tj. každou symetrickou matici řádu n lze symetrickou transformací převést na diagonální matici).

  Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})$ je symetrická matice řádu $n+1$. Rozlišíme několik případů:

  (a) $a_{i1} = 0$ pro každé $i \geq 2$ (tj. v prvním sloupci jsou samé nuly – až na první prvek).
  Protože $\mathbb{A}$ je symetrická, jsou i v prvním řádku samé nuly až na první prvek.
  Nyní lze použít indukční předpoklad – matici $\mathbb{A}_{11}$ (tj. takovou, která vznikne z $\mathbb{A}$ vynecháním prvního řádku a prvního sloupce) lze (podle indukčního předpokladu) převést symetrickou transformací na diagonální.
  To ovšem dává převod celé matice $\mathbb{A}$ na diagonální.

  (b) Neplatí (a) a přitom $a_{11} \neq 0$.
  Pak pro každé $j = 2, \ldots, n+1$ postupně provedeme následující symetrickou úpravu:
  Od j-tého řádku odečteme $\frac{a_{j1}}{a_{11}}$-násobek prvního řádku. Poté od j-tého slopuce odečteme $\frac{a_{1j}}{a_{11}}$-násobek prvního sloupce. (Je $a_{j1} = a_{1j}$, tedy jde opravdu o symetrickou úpravu.)
  Když tyto úpravy provedeme pro každé $j \in \{2, \ldots, n+1\}$, dostaneme matici splňující podmínku (a).

  (c) Neplatí (a) ani (b), ale na diagonále existuje nenulový prvek.
  Pak $a_{11} = 0$, ale najdeme $i \geq 2$, pro které $a_{ii} \neq 0$.
  Nyní provedeme symetrickou úpravu, která spočívá v tom, že nejprve prohodíme první a i-tý řádek a následně prohodíme první a i-tý sloupec.
  Tak dostaneme matici, která na místě 11 bude mít číslo $a_{ii} \neq 0$. To znamená, že výsledná matice splňuje podmínku (b)

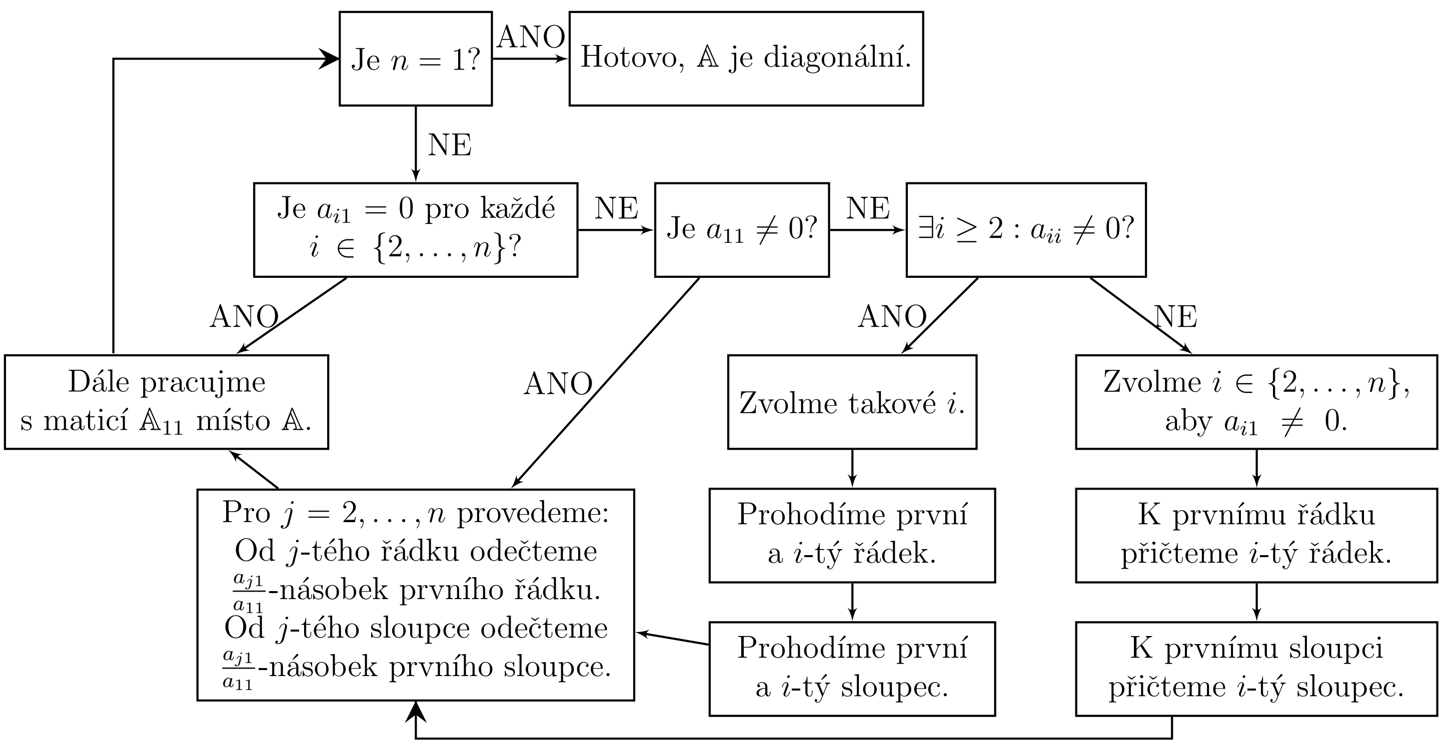
(nebo dokonce (a) – to v případě, že se při této úpravě vynuluje první sloupec a první řádek kromě pozice 11).

(d) Neplatí žádná z podmínek (a),(b),(c). To znamená, že $a_{ii} = 0$ pro každé i, ale v prvním sloupci je nějaký nenulový prvek. Tj., existuje $i \in \{2, \dots, n+1\}$, že $a_{i1} \neq 0$. (Pak $a_{1i} = a_{i1} \neq 0$.)
Provedeme symetrickou úpravu, která spočívá v tom, že nejprve k prvnímu řádku přičteme i-tý řádek a potom k prvnímu sloupci přičteme i-tý sloupec.
Výsledná matice bude mít na místě 11 číslo

$$a_{i1} + a_{1i} = 2a_{i1} \neq 0.$$

(Používáme předpoklad $a_{ii} \neq 0$.)
To znamená, že splňuje podmínku (b) (nebo dokonce (a) – to v případě, že se při této úpravě vynuluje první sloupec a první řádek kromě pozice 11).

- Uvedený důkaz je opravdu konstruktivní, dává nám následující algoritmus pro převod symetrické matice řádu n na diagonální:



Algoritmus pro vyšetření povahy (definitnosti) symetrické matice:

1. Máme-li zadanou symetrickou matici $\mathbb{A}$ řádu n, podle Věty IX.16 ji převedeme symetrickými úpravami na diagonální matici $\mathbb{D}$.

2. Povahu matice $\mathbb{D}$ určíme podle Větičky IX.11.

3. Matice $\mathbb{A}$ má stejnou povahu jako $\mathbb{D}$ (podle Věty IX.15).

K Větě IX.17:

- Tato věta dává alternativní kritérium pro vyšetření povahy matic. V praktickém počítání se moc nepoužívá, protože by to vyžadovalo výpočet většího množství determinantů.

  Jen pro matice řádu 2 dostáváme jednoduché nerovnosti.

  Význam této věty je spíše teoretický.

- Bod (i): To, zda matice je PD nebo ND lze poznat ze znamének n determinantů.

  D_k je determinant matice, která je tvořena prvky matice $\mathbb{A}$, které jsou zároveň v prvních k řádcích a v prvních k sloupcích.

  Přitom matice je PD, právě když všechny tyto determinanty jsou kladné.

  Dále, matice je ND, právě když se znaménka těchto determinantů pravidelně střídají, přičemž se začíná záporným číslem.

- Bod (ii): Abychom zjistili, zda matice je PSD nebo NSD, je třeba vyšetřit více determinantů.

  Pro matice řádu 2 a 3 jsou potřebné determinanty vyznačeny v následujícím schématu:

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \color{red}{a_{22}} \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \color{red}{a_{11}} & \color{red}{a_{12}} \\ \color{red}{a_{21}} & \color{red}{a_{22}} \end{pmatrix} \\ F = \{1\} & F = \{2\} & F = \{1, 2\} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$
$$F = \{1\} \qquad F = \{2\} \qquad F = \{3\} \qquad F = \{1,2\}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
$$F = \{1,3\} \qquad F = \{2,3\} \qquad F = \{1,2,3\}$$

Abychom dokázali, že matice je PSD, musíme ukázat, že všechny tyto determinanty jsou nezáporné.

Abychom dokázali, že matice je NSD, musíme ukázat, že tyto determinanty jsou nezáporné, mají-li sudý řád, a nekladné, mají-li lichý řád.

- Kritérium pro PSD/NSD je složitější než pro PD/ND. Zatímco pro důkaz PD/ND stačí spočítat n determinantů, pro důkaz PSD/NSD je to celkem $2^n - 1$ determinantů.

  O tom, že pro důkaz PSD/NSD nestačí stejných n determinantů jako pro PD/ND, svědčí například matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

  která je negativně semidefinitní, ale oba determinanty z bodu (i) jsou nulové (tedy nezáporné), nebo matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

  která je indefinitní, ale všechny tři determinanty z bodu (i) jsou nulové (tedy nezáporné).

  V praxi je kritérium nevhodné pro důkaz, že matice je PSD nebo NSD, protože výpočet $2^n - 1$ determinantů je výrazně delší než převod na diagonální matici.

  Ale může se hodit pro důkaz, že matice je ID. K tomu stačí výpočet dvou vhodně zvolených determinantů, někdy i jednoho.

Například, pokud na diagonále je nějaký kladný prvek a nějaký záporný prvek, pak víme, že matice je indefinitní. Nebo pokud najdeme jeden z determinantů řádu 2, který vyjde záporný, pak je matice indefinitní.

- Důkaz provádět nebudeme, používá metody mimo rámec Matematiky III.