Komentář k oddílu IX.2 – lineární zobrazení

K definici lineárního zobrazení:

- Definice lineárního zobrazení mezi vektorovými prostory připomíná definici lineárního zobrazení $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^m$ v odddíle VI.5.

  Je zcela analogická – lineární zobrazení je takové zobrazení, které zachovává operace. Rozdíl je pouze v tom, že zde pracujeme s obecnými vektorovými prostory, ne pouze s konkrétním příkladem $\mathbf{R}^n$ resp. $\mathbf{R}^m$.

  Abychom mohli mluvit o lineárních zobrazení U do V, musí být oba prostory nad týmž $\mathbf{K}$ – buď oba reálné nebo oba komplexní. To proto, aby na nich byly opravdu stejné operace a aby podmínka $L(a\boldsymbol{u}) = aL(\boldsymbol{u})$ měla smysl pro každé $a \in \mathbf{K}$.

- Je-li $L : U \to V$ lineární zobrazení, pak $L(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$. Tedy, nulový vektor v U se zobrazí na nulový vektor ve V.

  Ukažme si proč: Platí totiž

  $$L(\boldsymbol{o}) = L(\boldsymbol{o} + \boldsymbol{o}) = L(\boldsymbol{o}) + L(\boldsymbol{o}).$$

  Pokud nyní od obou stran odečteme $L(\boldsymbol{o})$ (tedy, přesněji, k oběma stranám přičteme opačný vektor $-L(\boldsymbol{o})$, dostaneme

  $$\underbrace{L(\boldsymbol{o}) + (-L(\boldsymbol{o}))}_{=\boldsymbol{o}} = \underbrace{(L(\boldsymbol{o}) + L(\boldsymbol{o})) + (-L(\boldsymbol{o}))}_{=L(\boldsymbol{o})+(L(\boldsymbol{o})+(-L(o)))=L(\boldsymbol{o})+\boldsymbol{o}=L(\boldsymbol{o})},$$

  tedy opravdu $L(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$.

- Příklady lineárních zobrazení:

  1. Lineární zobrazení $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ lze charakterizovat jako zobrazení reprezentovaná nějakou maticí typu $m \times n$ (viz oddíl VI.5).
  2. Zobrazení $L : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^m$ je lineární, právě když existuje matice $\mathbb{A} \in M_{\mathbf{C}}(m \times n)$ (tj. komplexní matice typu $m \times n$), že

     $$L(\boldsymbol{x}) = \mathbb{A}\boldsymbol{x} \text{ pro } \boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n,$$

     kde prvky $\mathbf{C}^n$ a $\mathbf{C}^m$ reprezentujeme jako sloupcové vektory.

     To je zcela analogické Větě VI.18 a důkaz je také zcela stejný.

3. Zobrazení $L : \mathfrak{s} \to \mathfrak{s}$ definované předpisem

$$L(\{x_n\}) = \{x_{2n}\}, \quad \{x_n\} \in \mathfrak{s},$$

které posloupnosti reálných čísel přiřadí vybranou posloupnost tvořenou prvky se sudými indexy, je lineární.

Dokáže se to tak, že se ověří obě vlastnosti z definice:

Vlastnost (i): Pro dvě posloupnosti $\{x_n\}, \{y_n\} \in \mathfrak{s}$ platí:

$$L(\{x_n\}+\{y_n\}) = L(\{x_n+y_n\}) = \{x_{2n}+y_{2n}\} = \{x_{2n}\}+\{y_{2n}\} = L(\{x_n\})+L(\{y_n\}).$$

Vlastnost (ii): Pro posloupnost $\{x_n\} \in \mathfrak{s}$ a $a \in \mathbf{R}$ platí:

$$L(a\{x_n\}) = L(\{ax_n\}) = \{ax_{2n}\} = a\{x_{2n}\} = aL(\{x_n\}).$$

4. Zobrazení $L : \mathfrak{s} \to \mathbf{R}$ definované předpisem

$$L(\{x_n\}) = x_{10} - x_9, \quad \{x_n\} \in \mathfrak{s},$$

které posloupnosti reálných čísel přiřadí rozdíl desátého a devátého členu posloupnosti, je lineární.

Dokáže se to tak, že se ověří obě vlastnosti z definice:

Vlastnost (i): Pro dvě posloupnosti $\{x_n\}, \{y_n\} \in \mathfrak{s}$ platí:

$$\begin{aligned} L(\{x_n\} + \{y_n\}) &= L(\{x_n + y_n\}) = (x_{10} + y_{10}) - (x_9 + y_9) \\ &= (x_{10} - x_9) + (y_{10} - y_9) = L(\{x_n\}) + L(\{y_n\}). \end{aligned}$$

Vlastnost (ii): Pro posloupnost $\{x_n\} \in \mathfrak{s}$ a $a \in \mathbf{R}$ platí:

$$L(a\{x_n\}) = L(\{ax_n\}) = ax_{10} - ax_9 = a(x_{10} - x_9) = aL(\{x_n\}).$$

5. Zobrazení $L : c \to \mathbf{R}$ definované předpisem

$$L(\{x_n\}) = \lim x_n, \quad \{x_n\} \in c,$$

které konvergentní posloupnosti reálných čísel přiřadí její limitu, je lineární.

Plyne to z věty o aritmetice limit.

6. Zobrazení $L : \mathcal{C}(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}(\mathbf{R})$ definované předpisem

$$L(f)(x) = f(x^2), \quad x \in \mathbf{R},\ f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}),$$

   které spojité funkci f přiřadí (taktéž spojitou) funkci $x \mapsto f(x^2)$, je lineární.

   Dokáže se to tak, že se ověří obě vlastnosti z definice:

   Vlastnost (i): Pro dvě funkce $f, g \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ a $x \in \mathbf{R}$ platí:

$$L(f+g)(x) = (f+g)(x^2) = f(x^2)+g(x^2) = L(f)(x)+L(g)(x) = (L(f)+L(g))(x).$$

   Vlastnost (ii): Pro funkci $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$, číslo $a \in \mathbf{R}$ a $x \in \mathbf{R}$ platí:

$$L(af)(x) = (af)(x^2) = a \cdot f(x^2) = aL(f)(x) = (aL(f))(x).$$

7. Zobrazení $L : \mathcal{C}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ definované předpisem

$$L(f) = \frac{1}{2}(f(0) + f(1)), \quad f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}),$$

   které spojité funkci f přiřadí aritmetický průměr hodnot f v bodě 0 a v bodě 1, je lineární.

   Dokáže se to tak, že se ověří obě vlastnosti z definice:

   Vlastnost (i): Pro dvě funkce $f, g \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ platí:

$$L(f+g) = \frac{1}{2}((f+g)(0)+(f+g)(1)) = \frac{1}{2}(f(0)+f(1))+\frac{1}{2}(g(0)+g(1)) = L(f)+L(g).$$

   Vlastnost (ii): Pro funkci $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ a číslo $a \in \mathbf{R}$ platí:

$$L(af) = \frac{1}{2}((af)(0) + (af)(1)) = a \cdot \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) = aL(f).$$

8. Zobrazení $L : \mathcal{C}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ definované předpisem

$$L(f) = \int_0^1 f, \quad f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}),$$

   které spojité funkci f přiřadí její Riemannův integrál přes interval $\langle 0, 1\rangle$, je lineární.

   Z Věty VIII.5 plyne, že pro každou $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ existuje její Riemannův integrál přes interval $\langle 0, 1\rangle$. Tedy, zobrazení L je dobře definované.

   To, že L je lineární, pak plyne z Věty VIII.3(iii).

9. Zobrazení $L : \mathcal{C}^1(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}(\mathcal{R})$ definované vzorcem

$$L(f)(x) = f'(x), \quad x \in \mathbf{R},\ f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}),$$

které každé funkci třídy $\mathcal{C}^1$ přiřadí její derivaci, je lineární.

Plyne to z věty o aritmetice derivací – viz Věta IV.13(i).

K pojmům jádra a obrazu a Větě IX.5:

- Je-li $L : U \to V$ lineární zobrazení, pak jeho jádro je podmnožina U tvořená těmi vektory, které se zobrazí na nulový vektor. Jinými slovy, $\ker L = L^{-1}(\boldsymbol{o})$.

  Jádra výše uvedených lineárních zobrazení:

  3. Jádro tvoří ty posloupnosti, které na všech sudých místech mají nulu, tj.

  $$\ker L = \{\{x_n\} \colon \text{pro každé } n \in \mathbf{N} \text{ je } x_{2n} = 0\}$$

  4. Jádro tvoří ty posloupnosti, které mají na devátém a desátém místě stejné číslo.
  5. Jádro tvoří posloupnosti s limitou 0.
  6. Jádro tvoří ty spojité funkce, které jsou nulové na $\langle 0, +\infty)$.
  7. Jádro tvoří ty spojité funkce, které mají v 0 a v 1 opačné hodnoty.
  8. $\ker L = \{f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}) \colon \int_0^1 f = 0\}$.
  9. Jádro je tvořeno konstantními funkcemi.

- Je-li $L : U \to V$ lineární zobrazení, pak $\operatorname{Im} L$ značíme jeho obor hodnot, tj.

  $$\operatorname{Im} L = \{\boldsymbol{v} \in V \colon \exists \boldsymbol{u} \in U : L(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}\}.$$

- Bod (i) Věty IX.5 říká, že jádro lineárního zobrazení $L : U \to V$ je podprostor prostoru U. Důkaz je jednoduchý, ověříme vlastnosti z definice podprostoru:

  – $\ker L \neq \emptyset$: Víme, že $L(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$, a tedy $\boldsymbol{o} \in \ker L$.

– Nechť $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \ker L$. Pak

$$L(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = \underbrace{L(\boldsymbol{u}_1)}_{=\boldsymbol{o}} + \underbrace{L(\boldsymbol{u}_2)}_{=\boldsymbol{o}} = \boldsymbol{o} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o},$$

tedu $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \in \ker L$.

– Nechť $\boldsymbol{u} \in \ker L$ a $\alpha \in \mathbf{K}$. Pak

$$L(\alpha \boldsymbol{u}) = \alpha \underbrace{L(\boldsymbol{u})}_{=\boldsymbol{o}} = \alpha \cdot \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o},$$

a tedy $\alpha \boldsymbol{u} \in \ker L$.

Poznámka: Použili jsme rovnost $\alpha \cdot \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$, kterou jsme zatím nedokázali. Ta ovšem plyne z axiómů vektorového prostoru:

$$\alpha \cdot \boldsymbol{o} = \alpha \cdot (\boldsymbol{o} + \boldsymbol{o}) = \alpha \cdot \boldsymbol{o} + \alpha \cdot \boldsymbol{o} = (\alpha + \alpha) \cdot \boldsymbol{o} = (2\alpha) \cdot \boldsymbol{o} = 2 \cdot (\alpha \cdot \boldsymbol{o}),$$

tedy $\alpha \cdot \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$.

- Bod (ii) Věty IX.5 říká, že obor hodnot lineárního zobrazení $L : U \to V$ je podprostor prostoru V. Důkaz se opět provede ověřením vlastností z definice podprostoru:

  – $\operatorname{Im} L \neq \emptyset$: Víme, že $L(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$, a tedy $\boldsymbol{o} \in \operatorname{Im} L$.

  – Nechť $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \operatorname{Im} L$. To znamená, že existují $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U$, pro která platí $L(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{v}_1$ a $L(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{v}_2$ Pak

$$L(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = L(\boldsymbol{u}_1) + L(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2,$$

  tedu $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in \operatorname{Im} L$ (je obrazem vektoru $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$).

  – Nechť $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Im} L$ a $\alpha \in \mathbf{K}$. Pak existuje $\boldsymbol{u} \in U$, pro které $L(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$. Potom

$$L(\alpha \boldsymbol{u}) = \alpha L(\boldsymbol{u}) = \alpha \cdot \boldsymbol{v},$$

  a tedy $\alpha \cdot \boldsymbol{v} \in \operatorname{Im} L$ (je obrazem vektoru $\alpha \cdot \boldsymbol{u}$).

- Bod (iii) dává do souvislosti dimenze jádra, oboru hodnot a definičního oboru lineárního zobrazení.

  Důkaz: Označme $k = \dim \ker L$ a $m = \dim \operatorname{Im} L$. Nejprve předpokládejme, že k i m jsou přirozená čísla (tj. ani 0 ani $+\infty$).

Krok 1: Nechť $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ tvoří bázi $\ker L$ a $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ tvoří bázi $\operatorname{Im} L$.

Protože $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in \operatorname{Im} L$, existují $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m \in U$, pro která platí $L(\boldsymbol{w}_1) = \boldsymbol{v}_1$, $L(\boldsymbol{w}_2) = \boldsymbol{v}_2$, $\ldots$, $L(\boldsymbol{w}_m) = \boldsymbol{v}_m$.

Ukážeme, že vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ tvoří bázi U. Pak bude platit, že $\dim U = k + m$ a důkaz bude hotov.

Krok 2: Vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ jsou lineárně nezávislé.

Předpokládejme, že $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbf{K}$ jsou taková, že

$$\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{u}_k + \beta_1 \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \beta_m \boldsymbol{w}_m = \boldsymbol{o}. \tag{$*$}$$

Pak platí

$$\begin{aligned} \boldsymbol{o} = L(\boldsymbol{o}) &= L(\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{u}_k + \beta_1 \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \beta_m \boldsymbol{w}_m) \\ &= \underbrace{\alpha_1 L(\boldsymbol{u}_1) + \cdots + \alpha_k L(\boldsymbol{u}_k)}_{=\boldsymbol{o},\ \text{protože } \boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_k \in \ker L} + \beta_1 \underbrace{L(\boldsymbol{w}_1)}_{=\boldsymbol{v}_1} + \cdots + \beta_m \underbrace{L(\boldsymbol{w}_m)}_{=\boldsymbol{v}_m} \\ &= \beta_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \beta_m \boldsymbol{v}_m. \end{aligned}$$

Protože $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ jsou lineárně nezávislé, musí být

$$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_m = 0 \tag{$**$}$$

Tedy, z $(*)$ nyní dostaneme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{o} &= \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{u}_k + \underbrace{\beta_1 \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \beta_m \boldsymbol{w}_m}_{=\boldsymbol{o}\ \text{podle } (**)} \\ &= \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{u}_k. \end{aligned}$$

Protože $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ jsou lineárně nezávislé, dostaneme

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

Vidíme tedy, že všechny koeficienty v lineární kombinaci v $(*)$ jsou nulové.

To dokončuje důkaz lineární nezávislosti vektorů $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$.

Krok 3: $\operatorname{lin}_{\mathbf{K}}\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m\} = U$.

Nechť $\boldsymbol{u} \in U$. Pak $L(\boldsymbol{u}) \in \operatorname{Im} L$. Protože $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ tvoří bázi $\operatorname{Im} L$, existují koeficienty $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbf{K}$ splňující

$$L(\boldsymbol{u}) = \beta_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \beta_m \boldsymbol{v}_m. \tag{$\circ$}$$

Označme
$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \beta_1 \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \beta_m \boldsymbol{w}_m.$$
Pak
$$\begin{aligned} L(\tilde{\boldsymbol{u}}) &= L(\beta_1 \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \beta_m \boldsymbol{w}_m) = \beta_1 L(\boldsymbol{w}_1) + \cdots + \beta_m L(\boldsymbol{w}_m) \\ &= \beta_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \beta_m \boldsymbol{v}_m = L(\boldsymbol{u}), \end{aligned}$$
a tedy
$$L(\boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{u}}) = L(\boldsymbol{u}) - L(\tilde{\boldsymbol{u}}) = L(\boldsymbol{u}) - L(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o},$$
neboli
$$\boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{u}} \in \ker L$$
. Protože $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ tvoří bázi $\ker L$, existují $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbf{K}$ splňující
$$\boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{u}} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{u}_k.$$
Pak ovšem
$$\boldsymbol{u} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{u}_k + \tilde{\boldsymbol{u}} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{u}_k + \beta_1 \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \beta_m \boldsymbol{w}_m.$$
Tedy $\boldsymbol{u} \in \operatorname{lin}_{\mathbf{K}}\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$.

Tím je důkaz hotov pro případ, kdy $k, m \in \mathbf{N}$. Proberme nyní zbývající případy:

- $m = 0$: V tomto případě $\operatorname{Im} L = \{\boldsymbol{o}\}$, tedy L je konstantní zobrazení, které každému $\boldsymbol{u} \in U$ přiřadí nulový vektor. To znamená, že $\ker L = U$. Tedy
$$\dim U = \dim U + 0 = \dim \ker L + \dim \operatorname{Im} L.$$
- $m = +\infty$: V $\operatorname{Im} L$ existuje nekonečná lineárně nezávislá množina. Podobně jako v kroku 1 výše si ke každému prvku této množiny vezmeme nějaký z jeho vzorů a tím dostaneme nekonečnou lineárně nezávislou množinu v U (viz krok 2). Tedy $\dim U = +\infty$ a požadovaná rovnost platí, protože obě strany jsou $+\infty$.
- $k = +\infty$: Protože $\dim \ker L = +\infty$ a $\ker L \subset U$, musí být také $\dim U = +\infty$. Opět požadovaná rovnost platí, protože obě strany jsou $+\infty$.

- $k = 0$, $m \in \mathbf{N}$: V tomto případě je $\ker L = \{\boldsymbol{o}\}$. Postupujeme podobně jako v důkaze výše, jen neuvažujeme $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$.

  Tedy, jako výše vezmeme $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ a zvolíme $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$. Jako v kroku 2 ukážeme, že $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ jsou lineárně nezávislé. V kroku 3 vezmeme $\boldsymbol{u} \in U$ a stejně definujeme $\tilde{\boldsymbol{u}}$. Stejně dokážeme, že $\boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{u}} \in \ker L$. To ovšem v tomto případě znamená, že $\boldsymbol{u} = \tilde{\boldsymbol{u}}$. A tím je dokázáno, že $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ tvoří bázi, tedy $\dim U = \dim \operatorname{Im} L$.

- O významu Věty IX.5 řekneme více níže, na konci oddílu.

K Větám IX.6 a IX.7:

- Velkou část úloh, k jejichž řešení se používá matematika, lze interpretovat jako úlohu řešit rovnici tvaru $L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$, kde L je nějaké zobrazení.

  Věta IX.6 říká, jaký tvar má množina všech řešení v případě, že L je lineární zobrazení.

- Důkaz Věty IX.6: Tvrdí se, že množina všech řešení je tvaru $\{\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{w} \colon \boldsymbol{w} \in \ker L\}$. Dokázat to znamená ukázat jednak, že každý prvek této množiny je řešením rovnice, a pak navíc, že každé řešení patří do této množiny.

  První část: Nechť $\boldsymbol{w} \in \ker L$. Pak

  $$L(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{w}) = \underbrace{L(\boldsymbol{x}_0)}_{=\boldsymbol{b}} + \underbrace{L(\boldsymbol{w})}_{=\boldsymbol{o}} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{b}.$$

  Tedy $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{w}$ je řešením rovnice.

  Druhá část: Nechť $\boldsymbol{x} \in U$ je řešením, tj. $L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$. Pak

  $$L(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = \underbrace{L(\boldsymbol{x})}_{=\boldsymbol{b}} - \underbrace{L(\boldsymbol{x}_0)}_{=\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}.$$

  Tedy $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \in \ker L$, tudíž

  $$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \underbrace{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0}_{\in \ker L}$$

  patří do oné množiny.

  A tím je důkaz hotov.

- Důkaz důsledku:

  Nechť L je prosté. Protože je lineární, je $L(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$. Protože je prosté, je $\boldsymbol{o}$ jediný vektor, který se zobrazí na $\boldsymbol{o}$. Tj. $\ker L = \{\boldsymbol{o}\}$.

  Nechť $\ker L = \{\boldsymbol{o}\}$. Nechť $\boldsymbol{b} \in V$. Pokud existuje nějaké $\boldsymbol{x}_0 \in U$, pro které platí $L(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{b}$, pak podle Věty IX.6 je jenom jedno ($\{\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{w} \colon \boldsymbol{w} \in \{\boldsymbol{o}\}\} = \{\boldsymbol{x}_0\}$). To ale znamená přesně, že L je prosté.

- Věta IX.7 je speciální případ Věty IX.6 pro lineární zobrazení $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ reprezentované maticí $\mathbb{A}$.

- Další ilustrace Věty IX.6:

  Nechť I je otevřený interval a $L : \mathcal{C}^1(I) \to \mathcal{C}(I)$ zobrazení, které každé funkci třídy $\mathcal{C}^1$ přiřadí její derivaci, tj. $L(f) = f'$.

  Pak $\ker L$ je tvořeno konstantními funkcemi na I.

  Nechť $g \in \mathcal{C}(I)$. Uvažme rovnici $L(f) = g$. Jejím řešením jsou primitivní funkce k funkci g.

  Víme (z Věty VIII.10), že pokud máme jednu primitivní funkci f_0, pak množina všech primitivních funkcí je

  $$\{f_0 + c \colon c \in \mathbf{R}\}.$$

  To je zároveň přesně vzorec z Věty IX.6.

Význam a použití vět z tohoto oddílu:

- Pokud máme vektorové prostory U a V, lineární zobrazení $L : U \to V$ a $\boldsymbol{b} \in V$; a chceme řešit rovnici $L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$, postupujeme následovně:

  Krok 1: Najdeme a popíšeme $\ker L$, tj. množinu všech řešení rovnice $L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}$.

  Víme, že $\ker L$ je podprostor U. Optimální je nalézt nějakou bázi tohoho podprostoru.

  Krok 2: Najdeme (nějak) jedno řešení rovnice $L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$, nazvěme ho $\boldsymbol{x}_0$.

  Krok 3: Všechna řešení jsou pak tvaru $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{w} \in \ker L$.

Takové úlohy jsou v matematice časté, kromě těch, co jsme již zmínili (soustavy lineárních rovnic, hledání primitivní funkce), další uvidíme v Matematice IV.

- Věta IX.5(iii) má význam hlavně v případě, že prostor U je konečné dimenze. Podívejme se podrobněji na případ zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^m$.

  Nechť $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ je zobrazení reprezentované maticí $\mathbb{A} \in M(m \times n)$. (Prvky $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$ interpretujeme jako sloupcové vektory.) Pak platí:

  – Roli prostoru U hraje prostor $\mathbf{R}^n$. Přitom $\dim \mathbf{R}^n = n$.

  – $\operatorname{Im} L$ je podprostor $\mathbf{R}^m$ tvořený právě těmi vektory $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^m$, pro které má soustava $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ řešení.

    $\operatorname{Im} L$ je tedy podprostor $\mathbf{R}^m$ generovaný sloupci matice $\mathbb{A}$ (viz Věta VI.16, ekvivalence (1) $\Leftrightarrow$ (3)).

    Dimenze prostoru $\operatorname{Im} L$ je tedy rovna hodnosti matice $\mathbb{A}$:

    Víme, že hodnost (tj. maximální počet lineárně nezávislých řádků) je rovna sloupcové hodnosti (tj. maximálnímu počtu lineárně nezávislých sloupců) – viz oddíl VI.2 a komentáře k němu.

    Přitom maximální počet lineárně nezávislých sloupců je roven dimenzi podprostoru generovaného sloupci. (Nechť $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ jsou lineárně nezávislé sloupce, přičemž je jich maximální počet, tedy po přidání nějakého dalšího sloupce do seznamu dostaneme již lineárně nezávislé vektory. Proto každý sloupec lze vyjádřit jako lineární kombinaci $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$. Z toho plyne, že podprostor generovaný vektory $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ se rovná podprostoru generovanému všemi sloupci. Tedy $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ tvoří bázi tohoto podprostoru.)

  – $\ker L$ je množina všech řešení soustavy $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$.

  – Bod (iii) Věty IX.5 říká, že $\dim \ker L + \dim \operatorname{Im} L = n$. Výše jsme vysvětlili, že $\dim \operatorname{Im} L = h(A)$, tedy platí

    $$\dim \ker L + h(A) = n.$$

  – Speciálně, je-li $m = n$, tj. $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ a $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n, plyne z předchozího Věta VI.19 (tj., že L je prosté, právě když L je na $\mathbf{R}^n$):

    L je prosté $\Leftrightarrow \ker L = \{\boldsymbol{o}\} \Leftrightarrow \dim \ker L = 0 \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} L = n \Leftrightarrow \operatorname{Im} L = \mathbf{R}^n \Leftrightarrow L$ je na $\mathbf{R}^n$