Doplňující cvičení k oddílu IX.2

Poznámka: Cvičení 1–5 doporučuji projít všem. Cvičení 6 je také dobré si projít, Cvičení 7 je obtížnější.

Cvičení 1: Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbf{K}$ a $L : U \to V$ je lineární zobrazení.

1. Nechť V' je podprostor prostoru V. Ukažte, že $L^{-1}(V')$, tj. vzor V' při zobrazení L, je podprostor prostoru U.

2. Nechť U' je podprostor prostoru U. Ukažte, že $L(U')$, tj. obraz U' při zobrazení L, je podprostor prostoru V.

Návod: Postupujte podobně jako v důkazu Věty IX.5.

Cvičení 2: Nechť $m, n \in \mathbf{N}$, $m < n$. Nechť $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ je lineární zobrazení. Ukažte, že L není prosté.

Návod: Použijte bod (iii) Věty IX.5 a Důsledek Věty IX.6.

Cvičení 3: Nechť $m, n \in \mathbf{N}$, $m > n$. Nechť $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ je lineární zobrazení. Ukažte, že L není na.

Návod: Použijte bod (iii) Věty IX.5.

Cvičení 4: Definujme zobrazení $L : \mathfrak{s} \to \mathfrak{s}$ předpisem

$$L(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{a_{n+1} - a_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

1. Ukažte, že L je lineární zobrazení.

2. Popište $\ker L$ a z toho odvoďte, že L není prosté.

3. Ukažte, že L je na.

Návod: 3. Pro libovolnou posloupnost $\{b_n\}$ popište nějakou posloupnost $\{a_n\}$, která se na $\{b_n\}$ zobrazí.

Cvičení 5: Definujme zobrazení $L : \mathfrak{s} \to \mathfrak{s}$ a $R : \mathfrak{s} \to \mathfrak{s}$ předpisem

$$L(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \dots$$
$$R(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = 0, a_1, a_2, a_3, a_4 \dots$$

1. Ukažte, že L i R jsou lineární zobrazení.
2. Popište $\ker L$ a z toho odvoďte, že L není prosté.
3. Ukažte, že L je na.
4. Pro každou posloupnost $\{b_n\}$ najděte všechna řešení rovnice $L(\{a_n\}) = \{b_n\}$.
5. Ukažte, že R je prosté.
6. Popište $\operatorname{Im} R$ a z toho odvoďte, že R není na.
7. Popište složená zobrazení $L \circ R$ a $R \circ L$ a ukažte, že se liší.

Cvičení 6: Definujme zobrazení $L : \mathcal{C}(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}(\mathbf{R})$ předpisem

$$L(f)(x) = xf(x), \quad x \in \mathbf{R}, \qquad f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}).$$

1. Ukažte, že L je lineární zobrazení.
2. Ukažte, že L je prosté.
3. Ukažte, že

   $$\operatorname{Im} L = \{f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}) \colon f(0) = 0 \text{ a existuje vlastní } f'(0)\}.$$

   Odvoďte z toho, že L není na.

Návod: 2. Ukažte, že $\ker L = \{0\}$. *K tomu použijte fakt, že spojitá funkce, která je nulová všude kromě bodu* 0, *je nulová všude.*

Cvičení 7: Definujme zobrazení $L : \mathcal{C}(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}(\mathbf{R})$ předpisem

$$L(f)(x) = f(x+1) - f(x), \quad x \in \mathbf{R}, \qquad f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}).$$

1. Ukažte, že L je lineární zobrazení.
2. Popište $\ker L$ a odvoďte, že L není prosté.
3. Ukažte, že L je na.
4. Pro $g \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ najděte všechna řešení rovnice $L(f) = g$.

Návod: 3. Vezměte libovolnou $g \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ a popište nějakou $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ splňující $L(f) = g$. Jedna z možností je postupovat takto: Začneme s tím, že f zvolíme vhodným způsobem na $\langle 0, 1\rangle$ – stačí zajistit, aby $f(1) - f(0) = g(0)$. Například tedy $f(x) = g(0)x$ pro $x \in \langle 0, 1\rangle$. Dále postupně f definujeme indukcí na intervalech $\langle n, n+1\rangle$ pro $n \in \mathbf{N}$ pomocí vztahu $f(x+1) = f(x) + g(x)$ a na intevalech $\langle -n, -(n-1)\rangle$ pro $n \in \mathbf{N}$ pomocí vztahu $f(x) = f(x+1) - g(x)$. 4. Použijte funkci zkonstruovanou v bodě 3 a pak Větu IX.6.