Doplňující cvičení k Lebesgueově míře a Lebesgueovu integrálu

Cvičení 1: Ukažte, že množina celých čísel $\mathbf{Z}$ je nulová v $\mathbf{R}$.

Návod: Víme, že jednobodové množiny jsou nulové a sjednocení posloupnosti nulových množin je nulová množina (viz Věta VIII.30)

Cvičení 2: Ukažte, že množina racionálních čísel $\mathbf{Q}$ je nulová v $\mathbf{R}$.

Návod: Například lze psát $\mathbf{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\frac{k}{n} : k \in \mathbf{Z}\}$ *a každá z množin napravo je nulová.*

Cvičení 3: Ukažte, $\lambda_1((0,1) \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})) = 1$.že množina racionálních čísel $\mathbf{Q}$ je nulová v $\mathbf{R}$.

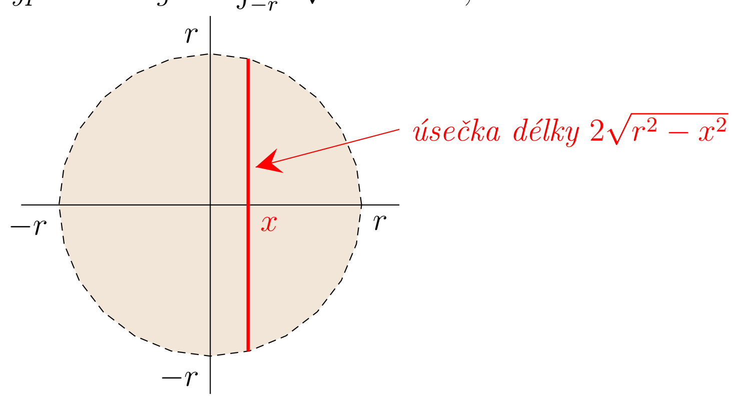
Návod: $\lambda_1((0,1) \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})) = \lambda_1((0,1)) \setminus \lambda_1((0,1) \cap \mathbf{Q})$.

Cvičení 4: Nechť $f = \chi_{(0,1)\cap(\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q})}$. Ukažte, že $\int_{\langle 0,1\rangle} f = 1$, ale f nemá Riemannův integrál přes $\langle 0,1\rangle$.

Návod: Použijte Cvičení 3 a definici Lebesgueova integrálu pro jednoduché funkce. Pro neexistenci Riemannova integrálu ukažte, že každý horní součet je 1 *a každý dolní součet je* 0.

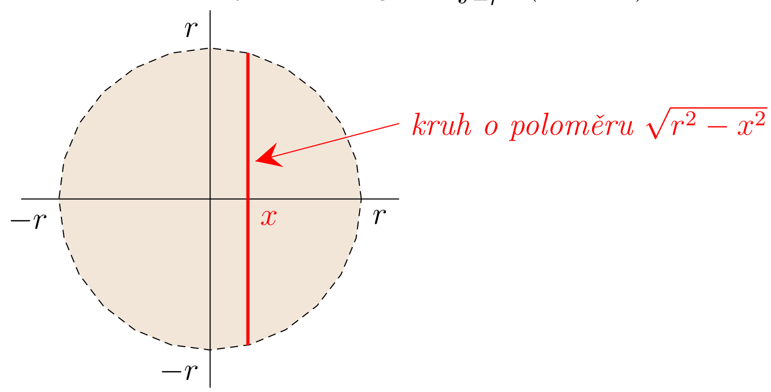
Cvičení 5: Spočtěte obsah kruhu pomocí Fubiniovy věty.

Návod: Spočtěte $\int_{B([0,0],r)} 1$ *s využitím Věty VIII.38. Tím se výpočet převede na výpočet integrálu* $\int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2}\,dx$, *viz obrázek.*



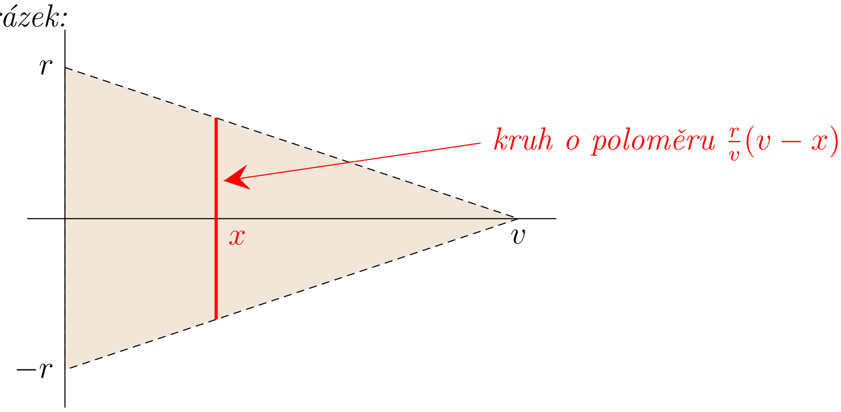
Cvičení 6: Spočtěte objem koule pomocí Fubiniovy věty.

Návod: Spočtěte $\int_{B([0,0,0],r)} 1$ *s využitím Věty VIII.38 a obsahu kruhu. Tím se výpočet převede na výpočet integrálu* $\int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx$*, viz obrázek.*



Cvičení 7: Spočtěte objem rotačního kužele pomocí Fubiniovy věty.

Návod: Představme si kužel, jehož podstavou je kruh v rovině yz o středu v počátku a poloměru r *a jehož vrcholem je bod* $[v, 0, 0]$*. S využitím Věty VIII.38 a obsahu kruhu se výpočet převede na výpočet integrálu* $\int_0^v \pi \frac{r^2}{v^2}(v-x)^2\,dx$*, viz obrázek:*



Cvičení 8: Spočtěte objem koule pomocí sférických souřadnic, tj. pomocí substituce za použití zobrazení $\varphi(r,s,t) = [r \sin s \cos t, r \sin s \sin t, r \cos s]$, $r \in (0, R)$, $s \in (0, 2\pi)$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Cvičení 9: Nechť f je měřitelná funkce na $\mathbf{R}$, pro kterou platí $\int_{\mathbf{R}} f = 1$. Ukažte, že pro každou měřitelnou množinu $A \subset \mathbf{R}$ platí

$$\int_{\mathbf{R}\times A} f(x+y)\,dx\,dy = \lambda_1(A).$$

Návod: Podle Fubiniovy věty je $\int_{\mathbf{R}\times A} f(x+y)\,dx\,dy = \int_A \left(\int_{\mathbf{R}} f(x+y)\,dx\right)\,dy$*, přičemž vnitřní integrál je vždy roven* 1*.*

Cvičení 10: Nechť f je nezáporná měřitelná funkce na $\mathbf{R}$, pro kterou platí $\int_{\mathbf{R}} f = 1$. Ukažte, že pro každou měřitelnou množinu $A \subset \mathbf{R}$ platí

$$\int_{\mathbf{R}\times A} f(xy)\,dx\,dy = \int_A \frac{1}{|y|}\,dy.$$

Návod: Podle Fubiniovy věty je $\int_{\mathbf{R}\times A} f(xy)\,dx\,dy = \int_A \left(\int_{\mathbf{R}} f(xy)\,dx\right)\,dy$*, přičemž vnitřní integrál je roven* $\frac{1}{|y|}$ *podle věty o substituci (pro* $y \neq 0$*).*