Doplňující cvičení k oddílům VIII.3 a VIII.5

Doporučuji všem projít Cvičení 1–5. Cvičení 6–8 jsou určena jen pro zájemce.

Cvičení 1: Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b). Ukažte, že F je spojitá na (a,b).

Návod: Existence vlastní derivace implikuje spojitost.

Cvičení 2: Nechť

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Ukažte, že F má v každém bodě $x \in \mathbf{R}$ vlastní derivaci, ale funkce $f = F'$ není spojitá v bodě 0.

Z toho odvoďte, že i k nespojité funkci může existovat primitivní funkce.

Cvičení 3: Nechť (a,b) je otevřený interval, $c \in (a,b)$, f a F jsou spojité funkce na (a,b).

Předpokládejme, že F je primitivní funkcí k f na intervalu (a,c) i na intervalu (c,b). Ukažte, že F je primitivní funkcí k f i na intervalu (a,b).

Návod: Buď použijte kombinaci vět VIII.8 a VIII.10, nebo použijte Větu IV.35.

Cvičení 4: Nechť f je nezáporná spojitá funkce na intervalu (a,b). Ukažte, že existuje zobecněný Riemannův integrál $\int_a^b f$.

Návod: Buď použijte definici, Větu VIII.4 a větu o limitě monotónní funkce; nebo Větu VIII.25, skutečnost, že primitivní funkce je neklesající, a větu o limitě monotónní funkce.

Cvičení 5: Nechť f a g jsou spojité funkce na intervalu (a,b), pro které platí $0 \le f \le g$ na (a,b). Předpokládejme, že $\int_a^b g$ konverguje. Ukažte, že i $\int_a^b f$ také konverguje.

Návod: Použijte Cvičení 4 a Větu VIII.24(iv).

Cvičení 6: Nechť f je spojitá funkce na (a,b) a $\int_a^b |f|$ konverguje. Ukažte, že $\int_a^b f$ také konverguje.

Návod: Je $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$ a funkce f^+, f^- jsou spojité. Použijte Cvičení 5 a Větu VIII.24.

Cvičení 7: Ukažte, že $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ konverguje.

Návod: Podle Věty VIII.26 je $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$*, pokud je výraz vpravo definovaný. Spočtěte onen zobecněný přírůstek a ukažte, že integrál vpravo konverguje pomocí Cvičení 6 a 5.*

Cvičení 8: Ukažte, že $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx = +\infty$.

Návod: Je $\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1-\cos 2x}{2x}$*. Ukažte, že* $\int \frac{\cos 2x}{2x}\,dx$ *konverguje (postupem ze Cvičení 7) a z Věty VIII.24 odvoďte, že* $\int \frac{1-\cos 2x}{2x}\,dx = +\infty$*. Na závěr použijte Cvičení 5 (obměnu).*