IX.4 Kvadratické formy

Úmluva. *V tomto oddílu je* $\mathbf{R}^n = M(n \times 1)$.

Definice.

- Řekneme, že matice $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je **symetrická**, jestliže $\mathbb{A}^T = \mathbb{A}$.
- Řekneme, že zobrazení $Q\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ je **kvadratická forma**, jestliže existuje symetrická matice $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ taková, že $Q(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}^T \mathbb{A} \boldsymbol{u} = \langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle$ pro $\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n$.

Poznámky.

(1) Matice $\mathbb{A}$ z definice se nazývá **reprezentující maticí kvadratické formy** Q. Lze ukázat, že reprezentující matice je kvadratickou formou určena jednoznačně.

(2) Je-li Q kvadratická forma, pak pro $x \in \mathbf{R}^n$ a $\alpha \in \mathbf{R}$ platí

$$Q(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha^2 Q(x).$$

Definice. Nechť $Q\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ je kvadratická forma. Řekneme, že Q je

- **pozitivně definitní** (PD), jestliže $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}\colon Q(\boldsymbol{u}) > 0$,
- **negativně definitní** (ND), jestliže $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}\colon Q(\boldsymbol{u}) < 0$,
- **pozitivně semidefinitní** (PSD), jestliže $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n\colon Q(\boldsymbol{u}) \geq 0$,
- **negativně semidefinitní** (NSD), jestliže $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n\colon Q(\boldsymbol{u}) \leq 0$,
- **indefinitní** (ID), neplatí-li nic z předchozího, tj.

$$\exists \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n\colon Q(\boldsymbol{u}) > 0 \,\&\, Q(\boldsymbol{v}) < 0.$$

Poznámka. Je-li $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ symetrická matice, pak říkáme, že tato matice je PD (ND, ...), má-li příslušnou vlastnost kvadratická forma reprezentovaná maticí $\mathbb{A}$.

Definice. Řekneme, že matice $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n\\ j=1..n}}$ je **diagonální**, jestliže $a_{ij} = 0$ pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$.

Větička 11. *Nechť* $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n\\ j=1..n}}$ *je diagonální. Pak platí:*

- $\mathbb{A}$ *je pozitivně definitní, právě když* $a_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, n$;
- $\mathbb{A}$ *je negativně definitní, právě když* $a_{ii} < 0$, $i = 1, \dots, n$;
- $\mathbb{A}$ *je pozitivně semidefinitní, právě když* $a_{ii} \geq 0$, $i = 1, \dots, n$;
- $\mathbb{A}$ *je negativně semidefinitní, právě když* $a_{ii} \leq 0$, $i = 1, \dots, n$;
- $\mathbb{A}$ *je indefinitní, právě když existují taková* $i, j \in \{1, \dots, n\}$, *že* $a_{ii} > 0$ *a* $a_{jj} < 0$.

Definice. **Symetrickou elementární úpravou** matice $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ budeme rozumět úpravu, kdy provedeme jistou elementární řádkovou úpravu matice $\mathbb{A}$ a vzniklou matici upravíme odpovídající sloupcovou úpravou. **Symetrickou transformací** matice $\mathbb{A}$ budeme rozumět konečnou posloupnost symetrických elementárních úprav.

Lemma 12. *Nechť T je transformace matic typu $m \times n$. Potom existuje regulární matice $\mathbb{B} \in M(m \times m)$ taková, že kdykoli $\mathbb{A}' \in M(m \times n)$ vznikla z $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ pomocí T, platí $\mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{A}'$.*

Věta 13. *Uvažujme symetrickou transformaci T matic typu $n \times n$. Potom existuje regulární matice $\mathbb{B} \in M(n \times n)$ taková, že kdykoli matice $\mathbb{A}' \in M(n \times n)$ vznikne z $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ pomocí T, pak platí $\mathbb{B}\mathbb{A}\mathbb{B}^T = \mathbb{A}'$.*

Lemma 14. *Symetrická transformace zachovává symetrii matice.*

Věta 15. *Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ a nechť $\mathbb{B} \in M(n \times n)$ vznikla z $\mathbb{A}$ pomocí symetrické transformace. Jestliže $\mathbb{A}$ je pozitivně definitní (negativně definitní, pozitivně semidefinitní, negativně semidefinitní, indefinitní), potom $\mathbb{B}$ je také pozitivně definitní (negativně definitní, ...).*

Věta 16. *Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je symetrická matice. Pak ji lze symetrickou transformací převést na diagonální matici.*

Věta 17 (Sylvestrovo pravidlo). *Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$ je symetrická matice.*

(i) *Označme $D_1 = \det(a_{11})$, $D_2 = \det\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$, ..., $D_n = \det \mathbb{A}$. Pak platí:*
- *$\mathbb{A}$ je pozitivně definitní, právě když $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, ..., $D_n > 0$.*
- *$\mathbb{A}$ je negativně definitní, právě když $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0$, ..., $(-1)^n D_n > 0$.*

(ii) *Je-li $F = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$, přičemž $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, označme $\tilde{D}_F = \det \begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \dots & a_{i_1 i_k} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \dots & a_{i_2 i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k i_1} & a_{i_k i_2} & \dots & a_{i_k i_k} \end{pmatrix}$. Pak platí:*
- *$\mathbb{A}$ je pozitivně semidefinitní, právě když pro každou neprázdnou podmožinu F množiny $\{1, \dots, n\}$ je $\tilde{D}_F \geq 0$.*
- *$\mathbb{A}$ je negativně semidefinitní, právě když pro každou neprázdnou podmožinu F množiny $\{1, \dots, n\}$ je $(-1)^{|F|}\tilde{D}_F \geq 0$, kde $|F|$ značí počet prvků množiny F.*

Důsledek. *Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$. Pak platí:*

- *$\mathbb{A}$ je pozitivně definitní, právě když $a > 0$ a $ab - c^2 > 0$;*
- *$\mathbb{A}$ je negativně definitní, právě když $a < 0$ a $ab - c^2 > 0$;*
- *$\mathbb{A}$ je pozitivně semidefinitní, právě když $a \geq 0$, $b \geq 0$ a $ab - c^2 \geq 0$;*
- *$\mathbb{A}$ je negativně semidefinitní, právě když $a \leq 0$, $b \leq 0$ a $ab - c^2 \geq 0$.*