IX.3 Skalární součin a norma

Definice. Nechť $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$.

- **Skalárním součinem** vektorů $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ rozumíme číslo

$$<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}> = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

- **Normou** vektoru $\boldsymbol{x}$ rozumíme číslo

$$\|x\| = \sqrt{<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}>} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} = \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{o}).$$

- Řekneme, že vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ jsou **kolmé**, jestliže $<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}> = 0$.

Větička 8 (vlastnosti skalárního součinu).

(i) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n : <\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}> = <\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}>$,
(ii) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbf{R}^n : <\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}> = <\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}> + <\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}>$,
(iii) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n \forall \alpha \in \mathbf{R} : <\alpha \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}> = \alpha <\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}>$.

Větička 9 (vlastnosti normy).

(i) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n : \|\boldsymbol{x}\| \geq 0$,
(ii) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n : (\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o})$,
(iii) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \forall \alpha \in \mathbf{R} : \|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$,
(iv) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n : \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ *(trojúhelníková nerovnost)*,
(v) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n : |<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}>| \leq \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|$ *(Cauchyova nerovnost)*.

Věta 10 (Pythagorova věta).

(a) *Nechť $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$. Pak vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ jsou kolmé, právě když $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2$.*
(b) *Nechť $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbf{R}^n$. Pak trojúhelník s vrcholy $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ má u vrcholu $\boldsymbol{z}$ pravý úhel (tj. vektory $\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}$ jsou kolmé), právě když $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 = \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})^2 + \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})^2$.*