VIII.6 Základy teorie vícerozměrného (Lebesgueova) integrálu konstrukce Lebesgueovy míry a Lebesgueova integrálu

Měřitelné množiny a Lebesguova míra

Definice. Nechť $n \in \mathbf{N}$. Pak symbolem $\mathcal{B}_n$ budeme značit nejmenší systém podmnožin $\mathbf{R}^n$, který má následující vlastnosti:

(i) $\mathcal{B}_n$ obsahuje všechny otevřené podmnožiny $\mathbf{R}^n$;
(ii) pokud množina A patří do $\mathcal{B}_n$, pak i $\mathbf{R}^n \setminus A$ patří do $\mathcal{B}_n$;
(iii) pokud $\{A_k\}$ je posloupnost množin z $\mathcal{B}_n$, pak i množina $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ patří do $\mathcal{B}_n$.

Prvky $\mathcal{B}_n$ se nazývají **borelovské množiny**, systém $\mathcal{B}_n$ pak σ-**algebra borelovských množin**.

Poznámka: Systém $\mathcal{B}_n$ má dále následující vlastnosti:

(iv) $\mathcal{B}_n$ obsahuje všechny uzavřené podmnožiny $\mathbf{R}^n$;
(v) pokud $A, B \in \mathcal{B}_n$, pak i množiny $A \cap B$, $A \cup B$, $B \setminus A$ patří do $\mathcal{B}_n$;
(vi) pokud $\{A_k\}$ je posloupnost množin z $\mathcal{B}_n$, pak i množina $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ patří do $\mathcal{B}_n$.

Věta 28 (existence Lebesgue-Borelovy míry). *Nechť $n \in \mathbf{N}$. Existuje právě jedno zobrazení $\lambda_n : \mathcal{B}_n \to \langle 0, +\infty\rangle$ s následujícími vlastnostmi:*

(a) *Pokud $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ jsou reálná čísla splňující $a_i < b_i$ pro $i = 1, \dots, n$, pak*

$$\lambda_n\Big(\langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n\rangle\Big) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cdots(b_n - a_n).$$

(b) *Pokud $\{A_k\}$ je disjunktní posloupnost množin z $\mathcal{B}_n$, pak*

$$\lambda_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(A_k).$$

*Zobrazení λ_n nazýváme n-**rozměrnou Lebesgue-Borelovou mírou**.*

Definice. Nechť $A \subset \mathbf{R}^n$.

- Řekneme, že A je **lebesgueovsky měřitelná** (krátce **měřitelná**), pokud existují $B, C \in \mathcal{B}_n$, pro které platí

$$B \subset A \subset C \text{ a } \lambda_n(C \setminus B) = 0.$$

- Systém všech lebesgueovsky měřitelných podmnožin $\mathbf{R}^n$ budeme značit $\widetilde{\mathcal{B}}_n$.
- Pokud A je lebesgueovsky měřitelná, pak definujeme

$$\widetilde{\lambda}_n(A) = \lambda_n(B), \text{ kde } B \text{ je jako v prvním bodě.}$$

Poznámka. Zobrazení $\widetilde{\lambda}_n : \widetilde{\mathcal{B}}_n \to \langle 0, +\infty\rangle$ je dobře definované (tj. hodnota $\widetilde{\lambda}_n(A)$ nezávisí na konkrétní volbě množin B, C). Toto zobrazení nazýváme n-**rozměrnou Lebesgueovou mírou**.

Věta 29 (vlastnosti měřitelných množin a Lebesgueovy míry).

(1) *$\widetilde{\mathcal{B}}_n \supset \mathcal{B}_n$, speciálně $\widetilde{\mathcal{B}}_n$ obsahuje otevřené i uzavřené podmnožiny $\mathbf{R}^n$.*
(2) *Pokud množina A patří do $\widetilde{\mathcal{B}}_n$, pak i $\mathbf{R}^n \setminus A$ patří do $\widetilde{\mathcal{B}}_n$.*
(3) *Pokud $\{A_k\}$ je posloupnost množin z $\widetilde{\mathcal{B}}_n$, pak i množiny $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ a $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ patří do $\widetilde{\mathcal{B}}_n$.*
(4) *Pokud $A, B \in \widetilde{\mathcal{B}}_n$, pak i množiny $A \cap B$, $A \cup B$, $B \setminus A$ patří do $\widetilde{\mathcal{B}}_n$.*
(5) *Pro $A \in \mathcal{B}_n$ platí $\widetilde{\lambda}_n(A) = \lambda_n(A)$.*
(6) *Pokud $\{A_k\}$ je disjunktní posloupnost množin z $\widetilde{\mathcal{B}}_n$, pak*

$$\widetilde{\lambda}_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\lambda}_n(A_k).$$

(7) *Pokud $A \in \widetilde{\mathcal{B}}_n$ a $\widetilde{\lambda}_n(A) = 0$, pak pro každou podmnožinu $B \subset A$ platí $B \in \widetilde{\mathcal{B}}_n$ (a $\widetilde{\lambda}_n(B) = 0$).*
(8) *Pokud $A \in \widetilde{\mathcal{B}}_n$ a $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, pak $\boldsymbol{x} + A \in \widetilde{\mathcal{B}}_n$ a $\widetilde{\lambda}(\boldsymbol{x} + A) = \widetilde{\lambda}_n(A)$.*
(9) *Pro každé $A \in \widetilde{\mathcal{B}}_n$ platí*

$$\widetilde{\lambda}_n(A) = \inf\{\lambda_n(G); G \supset A \text{ otevřená}\} = \sup\{\lambda_n(K); K \subset A \text{ kompaktní}\}.$$

Úmluva: Nadále budeme n-rozměrnou Lebesgueovu míru značit λ_n namísto $\widetilde{\lambda}_n$.

Definice. Množina $A \subset \mathbf{R}^n$ se nazývá **nulová v $\mathbf{R}^n$**, pokud $A \in \widetilde{\mathcal{B}}_n$ a $\lambda_n(A) = 0$.

Věta 30 (vlastnosti nulových množin).

(a) *Jednoprvkové množiny jsou nulové v $\mathbf{R}^n$.*
(b) *Je-li A nulová podmnožina v $\mathbf{R}^n$, pak každá její podmnožina je také nulová v $\mathbf{R}^n$.*
(c) *Je-li pro každé $k \in \mathbf{N}$ množina A_k nulová v $\mathbf{R}^n$, je i $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ nulová množina.*
(d) *Je-li $A \subset \mathbf{R}^n$ konvexní množina, pak její hranice $H(A)$ je nulová množina.*

Jednoduché funkce a jejich integrace

Definice.

- Nechť $A \subset \mathbf{R}^n$. **Charakteristickou funkcí množiny** A rozumíme funkci χ_A definovanou předpisem

$$\chi_A(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } \boldsymbol{x} \in A, \\ 0, & \text{pokud } \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \setminus A. \end{cases}$$

- **Jednoduchou (měřitelnou) funkcí** budeme rozumět funkci tvaru

$$f = c_1\chi_{A_1} + c_2\chi_{A_2} + \cdots + c_k\chi_{A_k},$$

kde $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \widetilde{\mathcal{B}}_n$ jsou po dvou disjunktní množiny a $c_1, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$.

Poznámka: Pokud f a g jsou jednoduché funkce a $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, pak $\alpha f + \beta g$ je také jednoduchá funkce.

Definice. Nechť f je jednoduchá funkce, která má výše uvedený tvar. Její **Lebesgueův integrál** definujeme vzorcem

$$(L)\int_{\mathbf{R}^n} f\,d\lambda_n = c_1\lambda_n(A_1) + c_2\lambda_n(A_2) + \cdots + c_k\lambda_n(A_k),$$

pokud má součet na pravé straně smysl (přičemž používáme konvenci $0 \cdot (+\infty) = 0$.

Pokud součet na pravé straně smysl nemá, říkáme, že **Lebesgueův integrál** $(L)\int_{\mathbf{R}^n} f\,d\lambda_n$ **neexistuje**.

Měřitelné funkce

Věta 31 (charakterizace měřitelných funkcí). *Nechť $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^*$ je funkce. Pak následující tři podmínky jsou ekvivalentní.*

(1) *Existuje posloupnost jednoduchých funkcí (g_n) taková, že pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ platí $g_n(\boldsymbol{x}) \to f(\boldsymbol{x})$.*

(2) *Pro každé $c \in \mathbf{R}$ patří množiny*

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n; f(\boldsymbol{x}) > c\} \text{ a } \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n; f(\boldsymbol{x}) < c\}$$

do $\widetilde{\mathcal{B}}_n$.

(3) *Pro každou otevřenou množinu $G \subset \mathbf{R}$ je $f^{-1}(G) \in \widetilde{\mathcal{B}}_n$.*

Definice. Funkce $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^*$ se nazývá **(lebesgueovsky) měřitelná**, pokud splňuje jednu z ekvivalentních podmínek z Věty 30.

Věta 32 (vlastnosti měřitelných funkcí).

(1) *Každá spojitá funkce je měřitelná.*

(2) *Nechť $f, g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^*$ jsou měřitelné funkce.*
   - *Je-li funkce $f + g$ definována na celém $\mathbf{R}^n$, pak $f + g$ je měřitelná funkce.*
   - *Je-li funkce $f \cdot g$ definována na celém $\mathbf{R}^n$, pak $f \cdot g$ je měřitelná funkce.*
   - *Je-li $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, pak αf je měřitelná funkce.*
   - $\max\{f, g\}$ a $\min\{f, g\}$ *jsou měřitelné funkce.*

(3) *Funkce $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^*$ je měřitelná, právě když funkce f^+ a f^- jsou měřitelné.*

(4) *Nechť $f, g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^*$ jsou dvě funkce, přičemž f je měřitelná a existuje nulová množina $E \subset \mathbf{R}^n$ taková, že $f = g$ na $\mathbf{R}^n \setminus E$. Pak g je měřitelná.*

(5) *Nechť (f_k) je posloupnost měřitelných funkcí $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^*$ a pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ existuje limita $f(\boldsymbol{x}) = \lim_k f_k(\boldsymbol{x})$. Pak i funkce f je měřitelná.*

(6) *Nechť $g_1, \dots, g_k : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ jsou měřitelné funkce a $f : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ je spojitá funkce. Pak funkce*

$$F(\boldsymbol{x}) = f(g_1(\boldsymbol{x}), \dots, g_k(\boldsymbol{x})), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n,$$

je měřitelná.

Lebesgueův integrál pro měřitelné funkce

Definice.

- Nechť $f : \mathbf{R}^n \to \langle 0, +\infty\rangle$ je nezáporná měřitelná funkce. Pak její **Lebesgueův integrál** definujeme vzorcem

$$(L)\int_{R^n} f\,d\lambda_n = \sup\left\{(L)\int_{R^n} g\,d\lambda_n;\ g \text{ jednoduchá}, 0 \le g \le f\right\}$$

(pokud je množina vpravo shora neomezená, je integrál roven $+\infty$).

- Nechť $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^*$ je měřitelná funkce. Její **Lebesgueův integrál** definujeme vzorcem

$$(L)\int_{R^n} f\,d\lambda_n = (L)\int_{R^n} f^+\,d\lambda_n - (L)\int_{R^n} f^-\,d\lambda_n,$$

pokud je rozdíl vpravo definován.

Pokud je rozdíl vpravo definován, říkáme, že $(L)\int_{R^n} f\,d\lambda_n$ **existuje**, případně, že funkce f **má Lebesgueův integrál**. Pokud rozdíl vpravo není definován, říkáme, že $(L)\int_{R^n} f\,d\lambda_n$ **neexistuje**, případně, že funkce f **nemá Lebesgueův integrál**.

Pokud $(L)\int_{R^n} f\,d\lambda_n$ existuje a je roven reálnému číslu, říkáme, že $(L)\int_{R^n} f\,d\lambda_n$ **konverguje**, případně, že funkce f je **integrovatelná**.

Pokud $(L)\int_{R^n} f\,d\lambda_n$ existuje a je roven $+\infty$ nebo $-\infty$, říkáme, že $(L)\int_{R^n} f\,d\lambda_n$ **diverguje**.

- Nechť $A \in \widetilde{\mathcal{B}}_n$ a $f : A \to \mathbf{R}^*$. Funkce f je **měřitelná**, pokud je měřitelná funkce $\widetilde{f}$, kde

$$\widetilde{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in A, \\ 0, & x \in \mathbf{R}^n \setminus A. \end{cases}$$

V tom případě **Lebesgueův integrál funkce** f **přes množinu** A definujeme předpisem

$$(L)\int_A f\,d\lambda_n = \int_{\mathbf{R}^n} \widetilde{f}\,d\lambda_n$$

v případě, že integrál napravo existuje.

- Nechť $A \in \widetilde{\mathcal{B}}_n$ a $f : A \to \mathbf{R}^*$ je měřitelná. Pokud $B \in \widetilde{\mathcal{B}}_n$, $B \subset A$, pak definujeme

$$(L)\int_B f\,d\lambda_n = \int_A \chi_B \cdot f\,d\lambda_n$$

v případě, že integrál napravo existuje.