VIII.4 Integrace racionálních funkcí

Definice. **Racionální funkcí** budeme rozumět podíl dvou polynomů, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule.

Věta 17 (o dělení polynomů). *Nechť P a Q jsou dva polynomy (s komplexními koeficienty), přičemž polynom Q není identicky roven nule. Pak existují jednoznačně určené polynomy R a Z splňující:*

(i) *Polynom Z je nulový nebo má stupeň menší než stupeň Q.*
(ii) *$P(x) = R(x)Q(x) + Z(x)$ pro všechna $x \in \mathbf{C}$.*

Pokud mají P a Q reálné koeficienty, mají i R a Z reálné koeficienty.

Důsledek. *Je-li P polynom (s komplexními koeficienty) a $\lambda \in \mathbf{C}$ je jeho kořen (tj. $P(\lambda) = 0$), pak existuje polynom R (s komplexními koeficienty), pro který platí $P(x) = (x - \lambda)R(x)$ pro $x \in \mathbf{C}$.*

Pokud má P reálné koeficienty a $\lambda \in \mathbf{R}$, pak i polynom R má reálné koeficienty.

Věta 18 (o rozkladu na kořenové činitele). *Nechť $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně n s komplexními koeficienty. Pak existují čísla $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{C}$ taková, že*

$$P(x) = a_n(x - x_1)\ldots(x - x_n), \qquad x \in \mathbf{C}.$$

Definice. Nechť P je polynom, $\lambda \in \mathbf{C}$ a $k \in \mathbf{N}$. Řekneme, že λ je **kořen násobnosti** k polynomu P, jestliže existuje polynom R, který splňuje $R(\lambda) \neq 0$ a $P(x) = (x - \lambda)^k R(x)$ pro $x \in \mathbf{C}$.

Poznámka. Nechť P je polynom stupně n a uvažujme jeho rozklad daný Větou 18. Pak $x_1, \ldots, x_n$ jsou všechny kořeny polynomu P. Navíc, je-li λ kořenem, pak jeho násobnost je rovna počtu výskytů čísla λ v seznamu $x_1, \ldots, x_n$.

Poznámka. Je-li $z \in \mathbf{C}$, $z = a + ib$, $a, b \in \mathbf{R}$, pak $\overline{z} = a - ib$ je číslo komplexně sdružené. Pro $z, w \in \mathbf{C}$ platí

- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;
- $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$;
- $\overline{z} = z$ právě když $z \in \mathbf{R}$.

Věta 19 (o kořenech polynomu). *Nechť P je polynom s reálnými koeficienty a $z \in \mathbf{C}$ je kořen P násobnosti $k \in \mathbb{N}$. Pak i $\overline{z}$ je kořen P násobnosti k.*

Věta 20 (o rozkladu polynomu). *Nechť* $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ *je polynom stupně* n *s reálnými koeficienty. Pak existují reálná čísla* $x_1, \ldots, x_k$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, $\beta_1, \ldots, \beta_l$ *a přirozená čísla* $p_1, \ldots, p_k$, $q_1, \ldots, q_l$ *taková, že*

(i) $P(x) = a_n (x - x_1)^{p_1} \ldots (x - x_k)^{p_k} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \ldots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,

(ii) *žádné dva z mnohočlenů* $x - x_1$, $x - x_2, \ldots, x - x_k$, $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \ldots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ *nemají společný kořen,*

(iii) *mnohočleny* $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \ldots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ *nemají žádný reálný kořen.*

Věta 21 (o rozkladu na parciální zlomky). *Nechť* P, Q *jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že*

(i) *stupeň* P *je ostře menší než stupeň* Q,

(ii) $Q(x) = a_n (x - x_1)^{p_1} \ldots (x - x_k)^{p_k} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \ldots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,

(iii) a_n, $x_1, \ldots x_k$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, $\beta_1, \ldots, \beta_l \in \mathbf{R}$, $a_n \neq 0$,

(iv) $p_1, \ldots, p_k$, $q_1, \ldots, q_l \in \mathbf{N}$,

(v) *žádné dva z mnohočlenů* $x - x_1$, $x - x_2, \ldots, x - x_k$, $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \ldots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ *nemají společný kořen,*

(vi) *mnohočleny* $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \ldots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ *nemají reálný kořen.*

Pak existují jednoznačně určená čísla $A_1^1, \ldots, A_{p_1}^1, \ldots, A_1^k, \ldots, A_{p_k}^k$, $B_1^1, C_1^1, \ldots, B_{q_1}^1, C_{q_1}^1, \ldots, B_1^l, C_1^l, \ldots, B_{q_l}^l, C_{q_l}^l$ *taková, že platí*

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1^1}{(x - x_1)^{p_1}} + \cdots + \frac{A_{p_1}^1}{(x - x_1)} + \cdots + \frac{A_1^k}{(x - x_k)^{p_k}} + \cdots + \frac{A_{p_k}^k}{x - x_k} \\ & + \frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1}} + \cdots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{x^2 + \alpha_1 x + \beta_1} + \cdots \\ & + \frac{B_1^l x + C_1^l}{(x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}} + \cdots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{x^2 + \alpha_l x + \beta_l}.\end{aligned}$$