X.2 Taylorovy řady elementárních funkcí

Definice. **Taylorovou řadou funkce** f **o středu** a nazýváme řadu $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ (má-li f v bodě a derivace všech řádů).

Věta 7. *Nechť* $a \in \mathbf{R}$, $r > 0$ *a* $f \in C^{\infty}((a-r, a+r))$. *Nechť existuje* $M > 0$ *takové, že*

$$\forall x \in (a-r, a+r) \forall k \in \mathbf{N} : |f^{(k)}(x)| \leq M.$$

Pak je funkce f *v každém bodě intervalu* $(a-r, a+r)$ *součtem své Taylorovy řady o středu* a.

Důsledek. *Pro každé* $x \in \mathbf{R}$ *jsou funkce* exp, sin *a* cos *součtem své Taylorovy řady o středu* 0. *Platí tedy:*

$$\forall x \in \mathbf{R}\colon \ \exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k,$$

$$\forall x \in \mathbf{R}\colon \ \sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1},$$

$$\forall x \in \mathbf{R}\colon \ \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{(2k)!} x^{2k}.$$

Poznámka. Z předchozího důsledku lze odvodit důkaz Věty IV.27 o zavedení funkce sinus a čísla π. Ze základních vlastností jsme postupně dokázali další vlastnosti až po vzorec v předchozím důsledku. To již dokazuje jednoznačnost z Věty IV.27 – funkce sinus musí být dána výše uvedeným vzorcem. Zbytek důkazu spočívá v ověření, že funkce daná vzorcem z předchozího důsledku má vlastnosti z Věty IV.27. To dá ještě trochu práce.

Věta 8. *Platí:*

$$\forall x \in (-1, 1\rangle\colon \ \log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k,$$

$$\forall x \in (-1, 1)\colon \ (1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$