# IX.4 Kvadratické formy

**Úmluva.** *V tomto oddílu je* $\mathbf{R}^n = M(n \times 1)$.

**Definice.**

- Řekneme, že matice $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je **symetrická**, jestliže $\mathbb{A}^T = \mathbb{A}$.
- Řekneme, že zobrazení $Q\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ je **kvadratická forma**, jestliže existuje symetrická matice $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ taková, že $Q(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}^T \mathbb{A} \boldsymbol{u} = \langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle$ pro $\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n$.

*Poznámky.* (1) Matice $\mathbb{A}$ z definice se nazývá **reprezentující maticí kvadratické formy** $Q$. Lze ukázat, že reprezentující matice je kvadratickou formou určena jednoznačně.

(2) Je-li $Q$ kvadratická forma, pak pro $x \in \mathbf{R}^n$ a $\alpha \in \mathbf{R}$ platí $Q(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha^2 Q(x)$.

**Definice.** Nechť $Q\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ je kvadratická forma. Řekneme, že $Q$ je

- **pozitivně definitní** (PD), jestliže $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}\colon Q(\boldsymbol{u}) > 0$,
- **negativně definitní** (ND), jestliže $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}\colon Q(\boldsymbol{u}) < 0$,
- **pozitivně semidefinitní** (PSD), jestliže $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n\colon Q(\boldsymbol{u}) \geq 0$,
- **negativně semidefinitní** (NSD), jestliže $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n\colon Q(\boldsymbol{u}) \leq 0$,
- **indefinitní** (ID), neplatí-li nic z předchozího, tj.
$$\exists \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n\colon Q(\boldsymbol{u}) > 0 \,\&\, Q(\boldsymbol{v}) < 0.$$

*Poznámka.* Je-li $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ symetrická matice, pak říkáme, že tato matice je PD (ND, ... ), má-li příslušnou vlastnost kvadratická forma reprezentovaná maticí $\mathbb{A}$.

**Definice.** Řekneme, že matice $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$ je **diagonální**, jestliže $a_{ij} = 0$ pro každé $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$.

**Větička 11.** *Nechť* $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$ *je diagonální. Pak platí:*

- $\mathbb{A}$ *je pozitivně definitní, právě když* $a_{ii} > 0$, $i = 1, \ldots, n$;
- $\mathbb{A}$ *je negativně definitní, právě když* $a_{ii} < 0$, $i = 1, \ldots, n$;
- $\mathbb{A}$ *je pozitivně semidefinitní, právě když* $a_{ii} \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$;
- $\mathbb{A}$ *je negativně semidefinitní, právě když* $a_{ii} \leq 0$, $i = 1, \ldots, n$;
- $\mathbb{A}$ *je indefinitní, právě když existují taková* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, *že* $a_{ii} > 0$ *a* $a_{jj} < 0$.

**Definice.** **Symetrickou elementární úpravou** matice $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ budeme rozumět úpravu, kdy provedeme jistou elementární řádkovou úpravu matice $\mathbb{A}$ a vzniklou matici upravíme odpovídající sloupcovou úpravou. **Symetrickou transformací** matice $\mathbb{A}$ budeme rozumět konečnou posloupnost symetrických elementárních úprav.

**Lemma 12.** *Nechť $T$ je transformace matic typu $m\times n$. Potom existuje regulární matice $\mathbb{B}\in M(m\times m)$ taková, že kdykoli $\mathbb{A}'\in M(m\times n)$ vznikla z $\mathbb{A}\in M(m\times n)$ pomocí $T$, platí $\mathbb{B}\mathbb{A}=\mathbb{A}'$.*

**Věta 13.** *Uvažujme symetrickou transformaci $T$ matic typu $n\times n$. Potom existuje regulární matice $\mathbb{B}\in M(n\times n)$ taková, že kdykoli matice $\mathbb{A}'\in M(n\times n)$ vznikne z $\mathbb{A}\in M(n\times n)$ pomocí $T$, pak platí $\mathbb{B}\mathbb{A}\mathbb{B}^T=\mathbb{A}'$.*

**Lemma 14.** *Symetrická transformace zachovává symetrii matice.*

**Věta 15.** *Nechť $\mathbb{A}\in M(n\times n)$ a nechť $\mathbb{B}\in M(n\times n)$ vznikla z $\mathbb{A}$ pomocí symetrické transformace. Jestliže $\mathbb{A}$ je pozitivně definitní (negativně definitní, pozitivně semidefinitní, negativně semidefinitní, indefinitní), potom $\mathbb{B}$ je také pozitivně definitní (negativně definitní, ...).*

**Věta 16.** *Nechť $\mathbb{A}\in M(n\times n)$ je symetrická matice. Pak ji lze symetrickou transformací převést na diagonální matici.*

**Věta 17** (Sylvestrovo pravidlo). *Nechť $\mathbb{A}=(a_{ij})_{\substack{i=1..n\\ j=1..n}}$ je symetrická matice.*

(i) *Označme $D_1=\det(a_{11})$, $D_2=\det\left(\begin{smallmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{smallmatrix}\right)$, ..., $D_n=\det\mathbb{A}$. Pak platí:*
   - *$\mathbb{A}$ je pozitivně definitní, právě když $D_1>0$, $D_2>0$, ..., $D_n>0$.*
   - *$\mathbb{A}$ je negativně definitní, právě když $D_1<0$, $D_2>0$, $D_3<0$, ..., $(-1)^nD_n>0$.*

(ii) *Je-li $F=\{i_1,\dots,i_k\}\subset\{1,\dots,n\}$, přičemž $i_1<i_2<\dots<i_k$, označme*
$$\tilde{D}_F=\det\begin{pmatrix}a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \dots & a_{i_1i_k}\\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \dots & a_{i_2i_k}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \dots & a_{i_ki_k}\end{pmatrix}.$$
*Pak platí:*
   - *$\mathbb{A}$ je pozitivně semidefinitní, právě když pro každou neprázdnou podmožinu $F$ množiny $\{1,\dots,n\}$ je $\tilde{D}_F\geq 0$.*
   - *$\mathbb{A}$ je negativně semidefinitní, právě když pro každou neprázdnou podmožinu $F$ množiny $\{1,\dots,n\}$ je $(-1)^{|F|}\tilde{D}_F\geq 0$, kde $|F|$ značí počet prvků množiny $F$.*

**Důsledek.** *Nechť $\mathbb{A}=\begin{pmatrix}a & c\\ c & b\end{pmatrix}$. Pak platí:*

- *$\mathbb{A}$ je pozitivně definitní, právě když $a>0$ a $ab-c^2>0$;*
- *$\mathbb{A}$ je negativně definitní, právě když $a<0$ a $ab-c^2>0$;*
- *$\mathbb{A}$ je pozitivně semidefinitní, právě když $a\geq 0$, $b\geq 0$ a $ab-c^2\geq 0$;*
- *$\mathbb{A}$ je negativně semidefinitní, právě když $a\leq 0$, $b\leq 0$ a $ab-c^2\geq 0$.*