IX.2 Lineární zobrazení

Definice. Nechť U a V jsou vektorové prostory nad (týmž) $\mathbf{K}$. Zobrazení $L\colon U \to V$ se nazývá **lineární**, jestliže platí:

(i) $\forall \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U\colon L(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = L(\boldsymbol{u}_1) + L(\boldsymbol{u}_2)$,

(ii) $\forall a \in \mathbf{K}\, \forall \boldsymbol{u} \in U\colon L(a\boldsymbol{u}) = aL(\boldsymbol{u})$.

Definice. Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbf{K}$, $L\colon U \to V$ nechť je lineární zobrazení. **Jádrem** lineárního zobrazení L nazveme množinu

$$\operatorname{Ker}(L) = \{\boldsymbol{u} \in U\colon L(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}\}.$$

Symbolem $\operatorname{Im}(L)$ značíme obor hodnot zobrazení L.

Věta 5. *Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbf{K}$, $L\colon U \to V$ nechť je lineární zobrazení. Potom platí:*

(i) Množina $\operatorname{Ker}(L)$ je vektorovým podprostorem U.

(ii) Množina $\operatorname{Im}(L)$ je vektorovým podprostorem V.

(iii) $\dim U = \dim \operatorname{Ker}(L) + \dim \operatorname{Im}(L)$.

Věta 6. *Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbf{K}$, $L\colon U \to V$ nechť je lineární zobrazení a $\boldsymbol{b} \in V$. Jestliže $\boldsymbol{x}_0 \in U$ je řešení rovnice $L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$, pak množina všech řešení má tvar*

$$\{\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{w}\colon \boldsymbol{w} \in \operatorname{Ker}(L)\}.$$

Důsledek. *Lineární zobrazení L je prosté, právě když* $\operatorname{Ker}(L) = \{\boldsymbol{o}\}$.

Věta 7. *Je-li $\mathbb{A} \in M(m \times n)$, $\boldsymbol{b} \in M(m \times 1)$ a $\boldsymbol{x}^0 \in M(n \times 1)$ řeší soustavu rovnic $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, pak množina všech řešení této soustavy má tvar*

$$\{\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{w}\colon \mathbb{A}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}\}.$$

Poznámka. Definujme $L(x) = \mathbb{A}\boldsymbol{x}$ pro $\boldsymbol{x} \in M(n \times 1)$. Pak soustava $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ má řešení, právě když $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im}(L)$, a $\operatorname{Im}(L)$ je podprostor $M(m \times 1)$ generovaný sloupci matice $\mathbb{A}$.