Dodatek: Základy teorie vícerozměrného (Lebesgueova) integrálu

Konvergence v $\mathbf{R}^*$ a konvergence posloupností funkcí

- Pro $x \in \mathbf{R}^*$ a $\varepsilon > 0$ budeme v tomto oddílu symbol $B(x,\varepsilon)$ definovat následovně:
  - $B(x,\varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ pro $x \in \mathbf{R}$;
  - $B(+\infty,\varepsilon) = (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\rangle = (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty) \cup \{+\infty\}$;
  - $B(-\infty,\varepsilon) = \langle -\infty, -\frac{1}{\varepsilon}) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}) \cup \{-\infty\}$.
- Nechť $\{x_k\}$ je posloupnost v $\mathbf{R}^*$ a $x \in \mathbf{R}^*$. Řekneme, že posloupnost $\{x_k\}$ **má limitu** x (nebo **konverguje k** x **v** $\mathbf{R}^*$, zapisujeme $x_k \to x$), jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbf{N} \forall k \in \mathbf{N}, k \geq k_0 : x_k \in B(x,\varepsilon).$$

- Nechť A je neprázdná množina, $\{f_k\}$ posloupnost zobrazení množiny A do $\mathbf{R}^*$ a f je zobrazení množiny A do $\mathbf{R}^*$.
  - Řekneme, že posloupnost $\{f_k\}$ **konverguje k** f **bodově na** A (píšeme $f_k \to f$ **na** A), jestliže pro každé $x \in A$ platí $f_k(x) \to f(x)$.
  - Píšeme, že $f_k \nearrow f$ **na** A, jestliže pro každé $x \in A$ je posloupnost $\{f_k(x)\}$ neklesající a navíc $f_k(x) \to f(x)$.

Měřitelné funkce a měřitelné množiny

- Pro každé $n \in \mathbf{N}$ nechť $\mathcal{M}_n$ označuje nejmenší množinu zobrazení množiny $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^*$ s vlastnostmi:
  (i) Je-li $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ spojitá na $\mathbf{R}^n$, pak $f \in \mathcal{M}_n$.
  (ii) Je-li $\{f_k\}$ posloupnost funkcí v $\mathcal{M}_n$ a $f_k \to f$ na $\mathbf{R}_n$, pak $f \in \mathcal{M}_n$.

  Prvky $\mathcal{M}_n$ se nazývají **měřitelné funkce** (přesněji **borelovsky měřitelné funkce**).
- Nechť $A \subset \mathbf{R}^n$. Pak symbolem χ_A značíme funkci definovanou předpisem

$$\chi_A(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{x} \in A, \\ 0, & \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \setminus A. \end{cases}$$

  Této funkci říkáme **charakteristická funkce množiny** A.
- Pro $n \in \mathbf{N}$ označme

$$\mathcal{B}_n = \{A \subset \mathbf{R}^n : \chi_A \in \mathcal{M}_n\}.$$

  Prvky $\mathcal{B}_n$ nazýváme **měřitelné množiny** (přesněji **borelovsky měřitelné množiny** nebo též **borelovské množiny**).

Věta 1 (vlastnosti měřitelných funkcí a měřitelných množin).

(1) *Nechť $f, g \in \mathcal{M}_n$.*
  - *Je-li funkce $f + g$ definována na celém $\mathbf{R}^n$, pak $f + g \in \mathcal{M}_n$.*
  - *Je-li funkce $f \cdot g$ definována na celém $\mathbf{R}^n$, pak $f \cdot g \in \mathcal{M}_n$.*
  - *Je-li $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, pak $\alpha f \in \mathcal{M}_n$.*
  - $\max\{f,g\} \in \mathcal{M}_n$, $\min\{f,g\} \in \mathcal{M}_n$.

(2) *$f \in \mathcal{M}_n$, právě když $f^+ \in \mathcal{M}_n$ a $f^- \in \mathcal{M}_n$.*

(3) *Nechť $f \in \mathcal{M}_n$, $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{M}_k$, přičemž funkce $g_1, \dots, g_k$ nabývají jen reálných hodnot. Definujme funkci $F : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^*$ předpisem*

$$F(\boldsymbol{x}) = f(g_1(\boldsymbol{x}), \dots, g_n(\boldsymbol{x})), \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^k.$$

Pak $F \in \mathcal{M}_n$.

(4) *Otevřené a uzavřené podmnožiny $\mathbf{R}^n$ patří do $\mathcal{B}_n$.*

(5) *Nechť $A, B \in \mathcal{B}_n$. Pak množiny $\mathbf{R}^n \setminus A$, $A \cap B$, $A \cup B$ patří do $\mathcal{B}_n$.*

(6) *Nechť $\{A_k\}$ je posloupnost množin z $\mathcal{B}_n$. Pak množiny $\bigcup_{k=1}^\infty A_k$ i $\bigcap_{k=1}^\infty A_k$ patří do $\mathcal{B}_n$.*

Poznámka. Funkce $\max\{f,g\}$ je definována předpisem

$$\max\{f,g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \qquad x \in \mathbf{R}^n.$$

Podobně je definována funkce $\min\{f,g\}$. Funkce f^+ a f^- jsou definovány vzorcem

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \qquad f^- = \max\{-f, 0\},$$

neboli

$$f^+(x) = (f(x))^+, \quad f^-(x) = (f(x))^-, \qquad x \in \mathbf{R}^n.$$

Integrál pro nezáporné měřitelné funkce

- Pro $n \in \mathbf{N}$ označme $\mathcal{M}_n^+ = \{f \in \mathcal{M}_n : f \geq 0\}$

Věta 2. *Existuje právě jedna posloupnost zobrazení $\{\mathcal{L}_n\}_{n=1}^{\infty}$ s vlastnostmi:*

(1) *$\mathcal{L}_n$ je zobrazení definované na $\mathcal{M}_n^+$ s hodnotami v intervalu $\langle 0, +\infty\rangle$.*
(2) *Je-li $f : \mathbf{R} \to \langle 0, +\infty)$ spojitá funkce, pak $\mathcal{L}_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f$, kde na pravé straně je zobecněný Riemannův integrál.*
(3) *$\mathcal{L}_n(0) = 0$.*
(4) *Je-li $f, g \in \mathcal{M}_n^+$ a $\alpha > 0$, pak $\mathcal{L}_n(\alpha f) = \alpha\mathcal{L}_n(f)$ a $\mathcal{L}_n(f+g) = \mathcal{L}_n(f) + \mathcal{L}_n(g)$.*
(5) *Pokud $f, g \in \mathcal{M}_n^+$ splňují $f \leq g$ na $\mathbf{R}^n$, pak $\mathcal{L}_n(f) \leq \mathcal{L}_n(g)$.*
(6) *Je-li $\{f_k\}$ posloupnost funkcí z $\mathcal{M}_n^+$ a $f_k \nearrow f$, pak $\lim\limits_{k\to\infty} \mathcal{L}_n(f_k) = \mathcal{L}_n(f)$.*
(7) *Nechť $k, l \in \mathbf{N}$ a $f \in \mathcal{M}_{k+l}^+$. Pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^k$ definujme funkci $f_{\boldsymbol{x}} : \mathbf{R}^l \to \langle 0, +\infty\rangle$ předpisem*

$$f_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l), \qquad \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^l.$$

Pak platí:
- ○ *$f_{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{M}_l^+$ pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^k$;*
- ○ *Funkce $F(\boldsymbol{x}) = \mathcal{L}_l(f_{\boldsymbol{x}})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^k$, patří do $\mathcal{M}_k^+$.*
- ○ *$\mathcal{L}_{k+l}(f) = \mathcal{L}_k(F)$.*

Poznámky. (i) Vlastnosti (3), (4) a (5) plynou z ostatních vlastností.

(ii) Vlastnosti (2) a (6) umožňují počítat hodnoty $\mathcal{L}_1$. Vlastnost (7) pak umožňuje počítat například $\mathcal{L}_{n+1}$ pomocí $\mathcal{L}_n$ a $\mathcal{L}_1$.

Definice.

- Pro $f \in \mathcal{M}_n^+$ hodnotu $\mathcal{L}_n(f)$ značíme

$$\int_{\mathbf{R}^n} f \text{ nebo } \int_{\mathbf{R}^n} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \text{ nebo } \int_{\mathbf{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n$$

  a nazýváme ji n-**rozměrným (Lebesgueovým) integrálem funkce** f **přes** $\mathbf{R}^n$.
- Pro $A \in \mathcal{B}_n$ značíme $\mathcal{L}_n(A) = \mathcal{L}_n(\chi_A)$. Tuto hodnotu nazýváme n-**rozměrnou mírou** množiny A. Množinu $A \in \mathcal{B}_n$ nazýváme **nulovou množinou v** $\mathbf{R}^n$, jestliže $\mathcal{L}_n(A) = 0$.

Poznámka. Rovnost $\mathcal{L}_{k+l}(f) = \mathcal{L}_k(F)$ z bodu (7) předchozí věty lze zapsat takto:

$$\int_{R^{k+l}} f = \int_{R^k} \left(\int_{R^l} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Integrál pro obecné měřitelné funkce

- Nechť $f \in \mathcal{M}_n$.
  - n-**rozměrný integrál funkce** f **přes** $\mathbf{R}^n$ definujeme předpisem

    $$\int_{\mathbf{R}^n} f = \int_{\mathbf{R}^n} f^+ - \int_{\mathbf{R}^n} f^-,$$

    je-li výraz na pravé straně definován. Pokud není definován, říkáme, že tento integrál **neexistuje**.
  - Řekneme, že funkce f je **integrovatelná**, jestliže $\int_{\mathbf{R}^n} f$ existuje a je roven reálnému číslu.
- Nechť $A \in \mathcal{B}_n$ a $f : A \to \mathbf{R}^*$. **Integrál funkce** f **přes množinu** A definujeme předpisem

  $$\int_A f = \int_{\mathbf{R}^n} \widetilde{f},$$

  kde

  $$\widetilde{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in A, \\ 0, & x \in \mathbf{R}^n \setminus A; \end{cases}$$

  v případě, že integrál napravo existuje.
- Nechť $f, g \in \mathcal{M}_n$. Řekneme, že $f = g$ **skoro všude**, pokud množina $\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n : f(\boldsymbol{x}) \neq g(\boldsymbol{x})\}$ je nulová. (Tato množina je automaticky měřitelná.)
- Podobně definujeme, co znamená $f \leq g$ skoro všude, $f < g$ skoro všude.
- Je-li $\{f_k\}$ posloupnost funkcí z $\mathcal{M}_n$ a $f \in \mathcal{M}_n$, říkáme, že $f_k \to f$ **skoro všude**, jestliže množina

  $$\{x \in \mathbf{R}^n : \text{není pravda, že } f_k(x) \to f(x)\}$$

  je nulová. (I tato množina je automaticky měřitelná.)

Základní věty o Lebesgueově integrálu

Věta 3 (vlastnosti nulových množin).

- *Jednoprvkové množiny jsou nulové v* $\mathbf{R}^n$.
- *Je-li pro každé* $k \in \mathbf{N}$ *množina* A_k *nulová v* $\mathbf{R}^n$, *je i* $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ *nulová množina.*
- *Je-li* $A \subset \mathbf{R}^n$ *konvexní množina, pak její hranice* $H(A)$ *je nulová množina.*

Věta 4.

(i) *Je-li* $f \in \mathcal{M}_n$ a $f = 0$ *skoro všude, pak* $\int_{\mathbf{R}^n} f = 0$.

(ii) *Jsou-li* $f, g \in \mathcal{M}_n$ *takové, že* $f = g$ *skoro všude, pak* $\int_{\mathbf{R}^n} f = \int_{\mathbf{R}^n} g$, *pokud alespoň jeden z těchto integrálů existuje.*

Věta 5 (Lebesgueova). *Nechť* $\{f_k\}$ *je posloupnost funkcí z* $\mathcal{M}_n$ *a nechť* $f \in \mathcal{M}_n$. *Nechť jsou splněny následující podmínky:*

(a) $f_k \to f$ *na* $\mathbf{R}^n$.

(b) *Existuje integrovatelná funkce* $g \in \mathcal{M}_n^+$ *taková, že pro každé* $k \in \mathbf{N}$ *platí* $|f_k| \leq g$ *na* $\mathbf{R}^n$.

Pak $\int_{\mathbf{R}^n} f = \lim\limits_{k \to \infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_k$.

Poznámka: V předchozí větě lze předpoklad (a) nahradit předpokladem, že $f_k \to f$ skoro všude na $\mathbf{R}^n$, a v bodě (b) stačí předpokládat, že nerovnost $|f_k| \leq g$ platí skoro všude na $\mathbf{R}^n$.

Věta 6 (Fubiniova). *Nechť $k, l \in \mathbf{N}$ a $f \in \mathcal{M}_{k+l}$ je integrovatelná. Pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^k$ definujme funkci $f_{\boldsymbol{x}} : \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}^*$ předpisem*

$$f_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \qquad \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^l.$$

Pak platí:

- $f_{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{M}_l$ *pro každé* $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^k$;
- *Množina* $A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^k : f_{\boldsymbol{x}}$ *není integrovatelná*$\}$ *je nulová v* $\mathbf{R}^k$.
- $\int_{\mathbf{R}^{k+l}} f = \int_{\mathbf{R}^k \setminus A} \left(\int_{\mathbf{R}^l} f_{\boldsymbol{x}} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

Věta 7 (o substituci). *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, funkce $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ jsou třídy C^1 na G, zobrazení $\varphi : G \to \mathbf{R}^n$ definované předpisem*

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = [\varphi_1(\boldsymbol{x}), \dots, \varphi_n(\boldsymbol{x})], \qquad \boldsymbol{x} \in G$$

nechť je prosté. Dále předpokládejme, že matice

$$\mathbb{J}_\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

je regulární v každém bodě $\boldsymbol{x} \in G$. Pak $\varphi(G)$ je otevřená množina a pro každou měřitelnou množinu $M \subset \varphi(G)$ a každou funkci $f : G \to \mathbf{R}^*$ platí

$$\int_M f = \int_{\varphi^{-1}(M)} f(\varphi(x)) \cdot |\det \mathbb{J}_\varphi(\boldsymbol{x})| \, \mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

pokud alespoň jeden z těchto integrálů je definován.

Věta 8 (příklady integrovatelných funkcí).

(1) *Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je omezená otevřená nebo uzavřená množina a f nechť je omezená spojitá funkce na M. Pak f je integrovatelná na M, tj. $\int_M f$ je reálné číslo.*

(2) *Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je omezená konvexní otevřená množina a f nechť je funkce spojitá na $\overline{M}$. Pak $\int_M f = \int_{\overline{M}} f$.*

(3) *Nechť pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, $a_i < b_i$. Nechť $M = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$. Nechť f je omezená spojitá funkce na M. Pak f je integrovatelná na M a platí*

$$\int_M f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\cdots \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) \, \mathrm{d}x_n \right) \mathrm{d}x_{n-1} \dots \right) \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1$$