VIII.4 Zobecněný Riemannův integrál

Lemma 15. *Nechť funkce f má Riemannův integrál přes interval $\langle a, b\rangle$. Pak platí*

$$\int_a^b f = \lim_{x\to a+} \int_x^b f = \lim_{x\to b-} \int_a^x f.$$

Lemma 16. *Nechť $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$, funkce f nechť je definována na (a, b). Jestliže pro nějaké $c \in (a, b)$ je definován výraz*

$$\lim_{x\to a+} \int_x^c f + \lim_{x\to b-} \int_c^x f$$

(tj. pokud obě limity existují a jejich součet je definován), pak pro každé $d \in (a, b)$ platí

$$\lim_{x\to a+} \int_x^d f + \lim_{x\to b-} \int_d^x f = \lim_{x\to a+} \int_x^c f + \lim_{x\to b-} \int_c^x f,$$

tj. výraz na levé straně je definován a rovná se výrazu na pravé straně.

Definice. Nechť $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$, funkce f nechť je definována na (a, b). Nechť $c \in (a, b)$. **Zobecněný Riemannův integrál funkce f přes interval** (a, b) definujeme vzorcem

$$\int_a^b f = \lim_{x\to a+} \int_x^c f + \lim_{x\to b-} \int_c^x f,$$

je-li výraz na pravé straně definován. Pokud výraz na pravé straně není definován, pak říkáme, že zobecněný Riemannův integrál funkce f přes interval (a, b) **neexistuje**.

Poznámky: (1) Existence ani hodnota zobecněného Riemannova integrálu přes (a, b) nezávisí na volbě $c \in (a, b)$.

(2) Jestliže f má Riemannův integrál přes interval $\langle a, b\rangle$, má i zobecněný Riemannův integrál přes interval (a, b) a hodnoty těchto integrálů jsou stejné.

(3) Zobecněný Riemannův integrál může mít i hodnotu $+\infty$ nebo $-\infty$. V případě, že hodnotou zobecněného Riemannova integrálu f přes (a, b) je reálné číslo, říkáme, že tento integrál **konverguje**. Pokud je jeho hodnotou $+\infty$ nebo $-\infty$, říkáme, že **diverguje**.

Věta 17 (vlastnosti zobecněného Riemannova integrálu). *Nechť f a g jsou funkce, které mají zobecněný Riemannův integrál přes interval (a,b).*

(i) *Je-li $\langle c,d\rangle \subset (a,b)$, pak funkce f má Riemannův integrál přes interval $\langle c,d\rangle$.*

(ii) *Nechť $\alpha \in \mathbf{R}$. Pak i funkce αf má zobecněný Riemannův integrál přes interval (a,b). Je-li $\alpha = 0$, je tento integrál nulový, je-li $\alpha \neq 0$, platí*

$$\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f,$$

(iii) *Jestliže součet $\int_a^b f + \int_a^b g$ je definován, pak i funkce $f+g$ má zobecněný Riemannův integrál přes (a,b) a platí*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

(iv) *Nechť platí $f(x) \geq g(x)$ pro každé $x \in (a,b)$. Pak*

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

(v) *Funkce $|f|$ má zobecněný Riemannův integrál přes (a,b) a platí*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

Věta 18. *Nechť f je spojitá funkce na intervalu (a,b) (kde $a,b \in \mathbf{R}^*$), nechť F je primitivní funkce k funkci f na (a,b). Pak f má zobecněný Riemannův integrál přes (a,b), právě když existují limity $\lim\limits_{x\to a+} F(x)$ a $\lim\limits_{x\to b-} F(x)$ a rozdíl těchto limit je definován. V tom případě platí*

$$\int_a^b f = \left(\lim_{x\to b-} F(x)\right) - \left(\lim_{x\to a+} F(x)\right).$$

Poznámka: Výraz na pravé straně se značí $[F]_a^b$ a nazývá se **zobecněným přírůstkem funkce F přes interval** (a,b).

Věta 19 (per partes pro určitý integrál). *Nechť funkce f a g mají na intervalu (a,b) spojitou první derivaci. Pak platí*

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg',$$

jestliže je výraz na pravé straně definován.

Věta 20 (substituce pro určitý integrál). *Nechť f je spojitá na intervalu (a,b), funkce φ nechť má na intervalu (α,β) spojitou derivaci, je ryze monotónní a zobrazuje interval (α,β) na interval (a,b). Pak*

$$\int_a^b f = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\cdot|\varphi'|,$$

jestliže alespoň jeden z integrálů existuje.