X.1 Taylorův polynom funkcí jedné reálné proměnné

Definice. Nechť $k \in \mathbf{N}$ a f je funkce jedné reálné proměnné, která má v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní k-tou derivaci. Pak **Taylorovým polynomem řádu** k **funkce** f **v bodě** a rozumíme polynom definovaný vzorcem

$$T_k^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Věta 1 (Peanův tvar zbytku). *Nechť $k \in \mathbf{N}$ a f je funkce jedné reálné proměnné, která má v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní k-tou derivaci. Nechť P je polynom stupně nejvýše k. Pak platí $P = T_k^{f,a}$, právě když*

$$\text{(P)} \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^k} = 0.$$

Poznámky. (1) Obsahem Věty 1 jsou dvě tvrzení – jedno říká, že polynom $P = T_k^{f,a}$ splňuje podmínku (P), druhé říká, že $T_k^{f,a}$ je jediný takový polynom stupně nejvýše k.

(2) Rovnost (P) lze vyjádřit takto: Existuje funkce ω, pro kterou platí

- $\lim_{x\to a} \omega(x) = 0$;
- $f(x) = P(x) + \omega(x)\cdot(x-a)^k$ na nějakém prstencovém okolí bodu a.

Větička 2. *Na nějakém okolí bodu 0 platí:*

(1) $\exp x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k + \omega(x)\cdot x^k$, $\lim_{x\to 0}\omega(x) = 0$.

(2) $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1} + \omega(x)\cdot x^{2k}$, $\lim_{x\to 0}\omega(x) = 0$.

(3) $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k} + \omega(x)\cdot x^{2k+1}$, $\lim_{x\to 0}\omega(x) = 0$.

(4) $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k + \omega(x)x^k$, $\lim_{x\to 0}\omega(x) = 0$.

(5) *Pro každé $\alpha \in \mathbf{R}$ máme $(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^k + \omega(x)x^k$, $\lim_{x\to 0}\omega(x) = 0$, kde $\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}$.*

Definice. Nechť f a g jsou funkce, $a \in \mathbf{R}^*$.

(i) Řekneme, že **funkce** f **je v bodě** a **malé** o **od** g (píšeme $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$), jestliže

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

(ii) Je-li navíc u funkce, pak zápis $f(x) = u(x) + o(g(x))$, $x \to a$, znamená $f(x) - u(x) = o(g(x))$, $x \to a$.

Věta 3. *Nechť $a \in \mathbf{R}^*$.*

(i) *Jestliže $f_1(x) = o(g(x))$, $x \to a$, a $f_2(x) = o(g(x))$, $x \to a$, pak $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$, $x \to a$.*

(ii) *Jestliže $f_1(x) = o(g_1(x))$, $x \to a$, a $f_2(x) = o(g_2(x))$, $x \to a$, pak $f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)g_2(x))$, $x \to a$.*

(iii) *Jestliže $f_1(x) = o(g(x))$, $x \to a$, a f_2 je nenulová na nějakém prstencovém okolí bodu a, pak $f_1(x)f_2(x) = o(g(x)f_2(x))$, $x \to a$.*

(iv) *Jestliže $f(x) = o(g_1(x))$, $x \to a$, a $\lim_{x\to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ je vlastní, pak $f(x) = o(g_2(x))$, $x \to a$.*

(v) *Jestliže $f_1(x) = o(g(x))$, $x \to a$, a f_2 je omezená na nějakém prstencovém okolí bodu a, pak $f_1(x)f_2(x) = o(g(x))$, $x \to a$.*

(vi) *Jestliže $m, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $m \le n$ a $f(x) = o((x-a)^n)$, $x \to a$, pak $f(x) = o((x-a)^m)$, $x \to a$.*

Věta 4. *Nechť $a, b \in \mathbf{R}^*$, $f(y) = o(g(y))$, $y \to b$, $\lim_{x\to a} \varphi(x) = b$ a existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in P(a, \delta)$ je $\varphi(x) \neq b$. Pak $f(\varphi(x)) = o(g(\varphi(x)))$, $x \to a$.*

Věta 5 (Lagrangeův tvar zbytku). *Nechť $k \in \mathbf{N}$, I je otevřený interval, $f \in \mathcal{C}^{k+1}(I)$ a $a \in I$. Potom pro každé $x \in I$ existuje číslo ξ, které leží mezi a a x a pro něž platí*

$$f(x) = T_k^a(x) + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}.$$

Větička 6.

(1) *Ke každému $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ a každému $x \in \mathbf{R}$ existuje bod ξ, který leží mezi 0 a x, pro nějž platí $\exp x = 1 + x + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \exp \xi \cdot \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$.*

(2) *Ke každému $k \in \mathbf{N}$ a každému $x \in \mathbf{R}$ existuje bod ξ, který leží mezi 0 a x, pro nějž platí*

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1} + (-1)^k \cos \xi \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

(3) *Ke každému $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ a každému $x \in \mathbf{R}$ existuje bod ξ, který leží mezi 0 a x, pro nějž platí*

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + (-1)^{k+1} \cos \xi \cdot \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}.$$