VI.2 Regulární matice a hodnost matice

Definice. Řekneme, že matice $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je **regulární**, pokud existuje matice $\mathbb{B} \in M(n \times n)$ taková, že $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}$.

Definice. Řekneme, že matice $\mathbb{B} \in M(n \times n)$ je **inverzní maticí** k matici $\mathbb{A} \in M(n \times n)$, jestliže $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}$.

Poznámky.

(i) Matice $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je regulární, právě když k ní existuje inverzní matice.
(ii) Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je regulární matice. Pak existuje právě jedna matice k ní inverzní. Značíme ji $\mathbb{A}^{-1}$.
(iii) Jsou-li $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(n \times n)$ takové, že $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I}$, pak $\mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}$. Toto dokážeme v oddílu VI.5.

Věta 4. *Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(n \times n)$ jsou regulární matice. Pak platí:*

(a) $\mathbb{A}^{-1}$ *je regulární matice a* $(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A}$.
(b) $\mathbb{A}^T$ *je regulární matice a* $(\mathbb{A}^T)^{-1} = (\mathbb{A}^{-1})^T$.
(c) $\mathbb{A}\mathbb{B}$ *je regulární matice a* $(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}$.

Definice. Nechť $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^m \in M(1 \times n)$ jsou řádkové vektory.

- **Lineární kombinací** vektorů $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^m$ budeme rozumět výraz tvaru $\lambda_1 \boldsymbol{v}^1 + \dots + \lambda_m \boldsymbol{v}^m$, kde $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ jsou reálná čísla.
- **Triviální lineární kombinací** vektorů $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^m$ rozumíme lineární kombinaci $0 \cdot \boldsymbol{v}^1 + \dots + 0 \cdot \boldsymbol{v}^m$. Lineární kombinaci, která není triviální, nazýváme **netriviální**.
- Řekneme, že vektory $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^m$ jsou **lineárně závislé**, pokud existuje jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru.
- Řekneme, že vektory $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^m$ jsou **lineárně nezávislé**, nejsou-li lineárně závislé, tj. pokud platí: kdykoli $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ jsou reálná čísla taková, že $\lambda_1 \boldsymbol{v}^1 + \dots + \lambda_m \boldsymbol{v}^m = \boldsymbol{o}$, pak $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$.

Definice. Nechť $\mathbb{A} \in M(m \times n)$. **Hodností** matice $\mathbb{A}$ rozumíme maximální počet jejích lineárně nezávislých řádků. Hodnost matice $\mathbb{A}$ značíme $h(\mathbb{A})$.

Poznámky.

(1) $h(\mathbb{A}) = k$ znamená, že lze najít k-tici řádků matice $\mathbb{A}$, která je lineárně nezávislá, ale každá $(k+1)$-tice je již lineárně závislá.

(2) Hodnost se někdy značí též $r(A)$ (z anglického **rank**).

Definice. Řekneme, že matice $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ je **schodovitá**, jestliže pro každé $i \in \{2, \dots, m\}$ její i-tý řádek je buď nulový nebo začíná větším počtem nul než $(i-1)$-ní řádek.

Poznámka. Hodnost schodovité matice je rovna počtu jejích nenulových řádků.

Definice. **Elementárními řádkovými úpravami** matice $\mathbb{A}$ rozumíme:

(1) přehození dvou řádků matice $\mathbb{A}$ (e.ř.ú. prvního druhu);
(2) vynásobení jednoho řádku matice $\mathbb{A}$ nenulovým číslem (e.ř.ú. druhého druhu);
(3) přičtení násobku jednoho řádku matice $\mathbb{A}$ k jinému řádku (e.ř.ú. třetího druhu).

Transformací rozumíme konečnou posloupnost elementárních řádkových úprav.

Věta 5 (vlastnosti transformace).

(i) *Každou matici lze vhodnou transformací převést na schodovitou matici.*
(ii) *Je-li T_1 transformace použitelná na matice o m řádcích, pak existuje transformace T_2 použitelná na matice o m řádcích taková, že pro každé dvě matice $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(m \times n)$ platí, že $\mathbb{B}$ vznikne z $\mathbb{A}$ aplikací transformace T_1, právě když $\mathbb{A}$ vznikne z $\mathbb{B}$ aplikací transformace T_2.*
(iii) *Jestliže lze matici $\mathbb{A}$ převést nějakou transformací na matici $\mathbb{B}$, pak $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{B})$.*

Poznámka. Analogicky jako řádkové úpravy a transformaci lze definovat **sloupcové úpravy** a **sloupcovou transformaci**. Je snadné dokázat, že sloupcová transformace nemění hodnost matice. Odtud plyne, že pro každou matici $\mathbb{A}$ platí $h(\mathbb{A}^T) = h(\mathbb{A})$.

Věta 6 (transformace a součin). *Nechť $\mathbb{A} \in M(m \times n)$, $\mathbb{B} \in M(n \times k)$, $\mathbb{C} \in M(m \times k)$ splňují $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{C}$. Nechť matice $\mathbb{A}'$ vznikne z matice $\mathbb{A}$ aplikací transformace T a matice $\mathbb{C}'$ vznikne z matice $\mathbb{C}$ aplikací téže transformace T. Pak $\mathbb{A}'\mathbb{B} = \mathbb{C}'$.*

Metoda hledání inverzní matice. *Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je regulární. Pak existuje transformace T, která $\mathbb{A}$ převede na jednotkovou matici. Aplikujeme-li tuto transformaci T na $\mathbb{I}$, dostaneme $\mathbb{A}^{-1}$.*

Věta 7. *Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Pak $\mathbb{A}$ je regulární, právě když $h(\mathbb{A}) = n$.*