V.9 Kvazikonkávní funkce

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní množina a funkce f je definována na M. Řekneme, že f je

- **kvazikonkávní na** M, jestliže

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M \, \forall t \in \langle 0, 1 \rangle : \; f(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}) \geq \min\{f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b})\},$$

- **ryze kvazikonkávní na** M, jestliže

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M, \, \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b} \, \forall t \in (0, 1) : \; f(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}) > \min\{f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b})\}.$$

Poznámky. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní množina a f je funkce definovaná na M.

(i) Funkce f je kvazikonkávní na M, právě když

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M, f(\boldsymbol{b}) \geq f(\boldsymbol{a}) \; \forall t \in \langle 0, 1 \rangle : \; f(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}) \geq f(\boldsymbol{a}).$$

(ii) Funkce f je ryze kvazikonkávní na M, právě když

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M, \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}, f(\boldsymbol{b}) \geq f(\boldsymbol{a}) \, \forall t \in (0, 1) : \; f(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}) > f(a).$$

(iii) Je-li f konkávní na M, pak je i kvazikonkávní na M.
(iv) Je-li f ryze konkávní na M, pak je i ryze kvazikonkávní na M.

Věta 25 (o jednoznačnosti extrému). *Nechť f je ryze kvazikonkávní funkce na konvexní množině $M \subset \mathbf{R}^n$. Pokud f nabývá na M svého maxima, pak ho nabývá právě v jednom bodě.*

Důsledek. *Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní, kompaktní a neprázdná množina a f je spojitá a ryze kvazikonkávní funkce na M. Pak f nabývá maxima na M právě v jednom bodě.*

Věta 26 (charakterizace kvazikonkávních funkcí pomocí úrovňových množin). *Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní množina a f je funkce definovaná na M. Funkce f je kvazikonkávní na M právě tehdy, když pro každé $\alpha \in \mathbf{R}$ je množina*

$$Q_\alpha = \{\boldsymbol{x} \in M; f(\boldsymbol{x}) \geq \alpha\}$$

konvexní.