V.8 Konkávní funkce

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$. Řekneme, že M je **konvexní** množina, jestliže platí:

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M \ \forall t \in \langle 0, 1 \rangle : \ t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y} \in M.$$

Věta 20 (o střední hodnotě). *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní otevřená množina, $f \in \mathcal{C}^1(G)$, $\boldsymbol{a} \in G, \boldsymbol{b} \in G$. Pak existuje $t_0 \in (0,1)$ tak, že*

$$f(\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t_0\boldsymbol{a} + (1-t_0)\boldsymbol{b})(a_i - b_i).$$

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní množina a funkce f je definována na M. Řekneme, že f je

- **konkávní** funkce na M, jestliže

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M \ \forall t \in \langle 0, 1 \rangle : \ f(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}) \geq tf(\boldsymbol{a}) + (1-t)f(\boldsymbol{b}),$$

- **ryze konkávní** funkce na M, jestliže

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M, \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b} \forall t \in (0,1) : \ f(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}) > tf(\boldsymbol{a}) + (1-t)f(\boldsymbol{b}).$$

Poznámky. (1) Analogicky se definují **konvexní** a **ryze konvexní** funkce. Funkce f je konvexní (ryze konvexní), právě když $-f$ je konkávní (ryze konkávní). Následující věty jsou formulovány pro konkávní a ryze konkávní funkce, jejich zřejmé analogie platí pro konvexní a ryze konvexní funkce.

(2) f je (ryze) konkávní na konvexní množině M, právě když je (ryze) konkávní na každé úsečce obsažené v M. To je ekvivalentní tomu, že pro každé dva body $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$, je funkce $t \mapsto f(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}))$ (ryze) konkávní na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Věta 21. *Nechť funkce f je konkávní na otevřené konvexní množině G. Pak f je spojitá na G.*

Poznámky. (1) Není-li G otevřená, f nemusí být spojitá na G (nemusí být spojitá v hraničních bodech G vzhledem ke G).

(2) Pro případ $n = 1$ je Věta 21 snadná. Je-li f konkávní na otevřeném intervalu (a, b), pak má v každém bodě intervalu (a, b) vlastní jednostranné derivace (to snadno plyne z Větičky IV.37 a Věty IV.9), a je tedy spojitá na (a, b). Pro obecné n je důkaz mírně složitější.

Věta 22. *Nechť funkce f je konkávní na konvexní množině M. Pak pro každé $\alpha \in \mathbf{R}$ je množina $Q_\alpha = \{\boldsymbol{x} \in M;\ f(\boldsymbol{x}) \geq \alpha\}$ konvexní.*

Věta 23 (charakterizace konkávních funkcí třídy C^1). *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní otevřená množina a $f \in C^1(G)$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(a) *Funkce f je konkávní na G.*
(b) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in G: \ f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})(y_i - x_i)$.
(c) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in G: \ \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{y}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}))(y_i - x_i) \leq 0$.

Důsledek. *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní otevřená množina, $f \in C^1(G)$ je konkávní funkce a $\boldsymbol{x} \in G$. Jestliže v bodě $\boldsymbol{x}$ jsou všechny parciální derivace prvního řádu funkce f nulové, pak f nabývá v $\boldsymbol{x}$ maxima na G.*

Věta 24 (charakterizace ryze konkávních funkcí třídy C^1). *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní otevřená množina a $f \in C^1(G)$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(a) *Funkce f je ryze konkávní na G.*
(b) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in G, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}: \ f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})(y_i - x_i)$.
(c) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in G, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}: \ \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{y}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}))(y_i - x_i) < 0$.