VII.3 Alternující řady

Věta 9 (Leibnizovo kritérium). *Mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. Nechť platí*

- $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$,
- $\lim a_n = 0$.

Potom $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *konverguje.*

Definice. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **neabsolutně konvergentní**, je-li konvergentní, ale ne absolutně konvergentní.

VII.4 Více o absolutně konvergentních řadách

Větička 10. *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada a* $\{n_k\}$ *je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pro kterou platí* $n_1 = 1$. *Pro* $k \in \mathbf{N}$ *označme*

$$b_k = a_{n_k} + a_{n_k+1} + \cdots + a_{n_{k+1}-1}.$$

(i) *Jestliže konverguje řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *pak konverguje i řada* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *a platí* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(ii) *Jestliže pro každé* $n \in \mathbf{N}$ *platí* $a_n \geq 0$ *a řada* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konverguje, pak konverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a platí* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Poznámka. Opačná implikace k bodu (i) neplatí, neboli v bodě (ii) nelze škrtnout předpoklad nezápornosti.

Definice. Budiž $\{k_n\}$ posloupnost přirozených čísel taková, že každé přirozené číslo je v ní obsaženo právě jednou. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ nazveme **přerovnáním řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta 11 (přerovnání absolutně konvergentních řad). *Nechť řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je absolutně konvergentní. Potom každé její přerovnání* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ *je absolutně konvergentní a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}.$$

Poznámka. Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ neabsolutně konvergentní řada, pak:

(i) pro každé $s \in \mathbf{R}^*$ existuje přerovnání, jehož součet je s;

(ii) existuje přerovnání, které nemá součet.

Věta 12 (součin absolutně konvergentních řad). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou dvě absolutně konvergentní řady. Čísla* $a_i b_j$, $i \in \mathbf{N}$, $j \in \mathbf{N}$, *uspořádejme libovolným způsobem do posloupnosti* $\{c_k\}$. *Pak je řada* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ *absolutně konvergentní a platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

Poznámka. Pro neabsolutně konvergentní řady předchozí věta neplatí. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ totiž nemusí být konvergentní, a i když je konvergentní, může mít libovolný součet.