VII.1 Číselné řady – základní pojmy a vlastnosti

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel.

- Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme **nekonečnou řadou**.
- Číslo a_n budeme nazývat n-**tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Pro $m \in \mathbb{N}$ položme $s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$. Číslo s_m nazveme **m-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- **Součtem nekonečné řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje**, je-li její součet reálné číslo. V opačném případě řekneme, že řada **diverguje**.

Možné chování řady.

$$\text{Řada } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{konverguje, tj. jejím součtem je reálné číslo} \\ \text{diverguje} \begin{cases} \text{má součet } +\infty \text{ nebo } -\infty \\ \text{nemá součet (}\textbf{osciluje}\text{)} \end{cases} \end{cases}$$

Věta 1 (nutná podmínka konvergence řady). *Jestliže řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, potom* $\lim a_n = 0$.

Větička 2.

(i) *Nechť řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje a* $\lambda \in \mathbf{R}$. *Pak konverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ *a platí* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(ii) *Nechť řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergují. Pak konverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *a platí* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Poznámky.

(1) Mějme dvě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Jestliže existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje (tj. buď obě řady konvergují nebo obě divergují).

(2) Nechť $N \in \mathbf{N}$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+N-1}$.