VI.3 Determinanty

Definice. Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Maticí $\mathbb{A}_{ij}$ budeme rozumět matici typu $(n-1) \times (n-1)$, která vznikne z $\mathbb{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Definice. Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$. **Determinant matice** $\mathbb{A}$ definujeme takto:

$$\det \mathbb{A} = a_{11}, \qquad \text{pokud } n = 1,$$

$$\det \mathbb{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det \mathbb{A}_{i1}, \quad \text{pokud } n > 1.$$

Pro $\det \mathbb{A}$ budeme také používat symbol $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Poznámka: Má-li matice $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ nějaký řádek nebo sloupec nulový, platí $\det \mathbb{A} = 0$.

Definice. Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$. Řekneme, že $\mathbb{A}$ je **horní trojúhelníková matice**, jestliže platí $a_{ij} = 0$ pro $i > j$, $i, j \in \{1, \dots n\}$. Řekneme, že $\mathbb{A}$ je **dolní trojúhelníková matice**, jestliže platí $a_{ij} = 0$ pro $i < j$, $i, j \in \{1, \dots n\}$.

Věta 8. *Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$ je horní (resp. dolní) trojúhelníková matice. Pak platí* $\det \mathbb{A} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$.

Lemma 9. *Nechť $i \in \{1, \dots, n\}$, matice $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in M(n \times n)$ se shodují ve všech prvcích s výjimkou prvků v i-tém řádku a přitom i-tý řádek matice $\mathbb{C}$ je roven součtu i-tého řádku matice $\mathbb{A}$ a i-tého řádku matice $\mathbb{B}$. Pak* $\det \mathbb{C} = \det \mathbb{A} + \det \mathbb{B}$.

Věta 10 (determinant a řádkové úpravy). *Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$.*

(i) *Nechť matice $\mathbb{A}'$ vznikne z $\mathbb{A}$ tak, že v $\mathbb{A}$ vyměníme dva řádky mezi sebou (tj. provedeme řádkovou elementární úpravu prvního druhu). Pak platí* $\det \mathbb{A}' = -\det \mathbb{A}$.

(ii) *Nechť matice $\mathbb{A}'$ vznikne z $\mathbb{A}$ tak, že v $\mathbb{A}$ jeden řádek vynásobíme reálným číslem λ. Pak platí* $\det \mathbb{A}' = \lambda \det \mathbb{A}$.

(iii) *Nechť matice $\mathbb{A}'$ vznikne z $\mathbb{A}$ tak, že v $\mathbb{A}$ λ-násobek jednoho řádku přičteme k jinému řádku (tj. provedeme řádkovou elementární úpravu třetího druhu). Pak platí* $\det \mathbb{A}' = \det \mathbb{A}$.

Důsledek.

- *Nechť T je transformace použitelná na matice typu $n \times n$. Pak existuje nenulové reálné číslo α takové, že kdykoli matice $\mathbb{A}'$ vznikne z matice $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ aplikací transformace T, pak*

$$\det \mathbb{A}' = \alpha \cdot \det \mathbb{A}.$$

- *Nechť matice $\mathbb{A}'$ vznikne z matice $\mathbb{A}$ provedením nějaké transformace. Pak* $\det \mathbb{A}' = 0$, *právě když* $\det \mathbb{A} = 0$.

Věta 11. *Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Pak $\mathbb{A}$ je regulární, právě když* $\det \mathbb{A} \neq 0$.

Věta 12. *Pro $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(n \times n)$ platí* $\det \mathbb{A}\mathbb{B} = \det \mathbb{A} \cdot \det \mathbb{B}$.

Poznámka. Analogie Lemmatu 9 platí i pro sloupce matice. Věta 10 i její důsledek platí i pro sloupcové úpravy. Důkaz analogie Věty 10(i) je trochu náročnější, ostatní tvrzení se dokáží velmi podobně jako pro řádkové úpravy.

Věta 13. *Pro $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ platí* $\det \mathbb{A} = \det \mathbb{A}^T$.

Věta 14. *Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Pak*

$$\det \mathbb{A} = \textstyle\sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det \mathbb{A}_{ij} \qquad \text{(rozvoj podle } j\text{-tého sloupce)}$$

a

$$\det \mathbb{A} = \textstyle\sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ji} \det \mathbb{A}_{ji} \qquad \text{(rozvoj podle } j\text{-tého řádku).}$$

Poznámky. (1) Rozvoj determinantu podle prvního sloupce je vlastně definice determinantu.

(2) Nechť $n \in \mathbf{N}$. Pak funkce $f : \mathbf{R}^{n^2} \to \mathbf{R}$ definovaná předpisem

$$f(x_1, \dots, x_{n^2}) = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n(n-1)+1} & x_{n(n-1)+2} & \dots & x_{n^2} \end{pmatrix}$$

je spojitá na $\mathbf{R}^{n^2}$.

(3) Nechť $\mathbb{A} \in M(2 \times 2)$. Nechť $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ jsou řádky matice $\mathbb{A}$. Uvažme rovnoběžník s vrcholy $\boldsymbol{o}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2$. Pak obsah tohoto rovnoběžníku je roven $|\det \mathbb{A}|$.

(4) Nechť $\mathbb{A} \in M(3 \times 3)$ a $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ jsou řádky matice $\mathbb{A}$. Uvažme rovnoběžnostěn s jedním vrcholem v počátku takový, že sousední vrcholy jsou $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$. (Možná představa: jedna stěna je rovnoběžník s vrcholy $\boldsymbol{o}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2$ a stěna s ní rovnoběžná má vrcholy $\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_2$.) Pak objem tohoto rovnoběžnostěnu je roven $|\det \mathbb{A}|$.

(5) Podobně pro $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ lze $|\det \mathbb{A}|$ interpretovat jako n-rozměrný objem jistého n-rozměrného rovnoběžnostěnu.