VIII.2 Riemannův integrál pro spojité funkce

Definice. Řekneme, že funkce f je **stejnoměrně spojitá** na intervalu I, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x,\, y \in I,\; |x-y| < \delta : \; |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Věta 4. *Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, $a, b \in \mathbf{R}$. Pak je f stejnoměrně spojitá na $\langle a, b\rangle$.*

Poznámka: Pro neuzavřené intervaly Věta 4 neplatí.

Věta 5. *Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, $a, b \in \mathbf{R}$. Pak f má Riemannův integrál přes $\langle a, b\rangle$.*

Lemma 6. *Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, $a, b \in \mathbf{R}$ a $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$. Pak platí*

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) = \int_a^b f.$$

Věta 7 (derivování Riemannova integrálu). *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a $c \in \langle a, b\rangle$. Označíme-li $F(x) = \int_c^x f$ pro $x \in \langle a, b\rangle$, pak $F'(x) = f(x)$ pro $x \in (a, b)$.*

Definice. Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval a f, F funkce definované na I. Řekneme, že F je **primitivní funkcí** k f na I, jestliže pro každé $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$.

Věta 8 (existence primitivní funkce). *Nechť f je funkce spojitá na otevřeném intervalu I. Pak existuje primitivní funkce k funkci f na I.*

Věta IV.23 ze zimního semestru (zavedení logaritmu). *Existuje jediná funkce (značíme ji* log *a nazýváme ji přirozeným logaritmem), která má tyto vlastnosti:*

(L1) $D_{\log} = (0, +\infty)$ *a na tomto intervalu je* log *rostoucí,*
(L2) $\forall x, y \in (0, +\infty) : \; \log xy = \log x + \log y$,
(L3) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$.

Věta 9 (výpočet Riemannova integrálu). *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a F nechť je primitivní funkce k funkci f na intervalu (a, b). Pak existují vlastní limity $\lim\limits_{x\to a+} F(x)$ a $\lim\limits_{x\to b-} F(x)$ a platí*

$$\int_a^b f = \left(\lim_{x\to b-} F(x)\right) - \left(\lim_{x\to a+} F(x)\right).$$