II.4. Hlubší výsledky o limitách

Věta 9 (o limitě monotónní posloupnosti). *Každá monotónní posloupnost má limitu. Podrobněji:*

(i) *Nechť posloupnost* $\{a_n\}$ *je neklesající.*

(a) *Je-li posloupnost* $\{a_n\}$ *shora omezená, pak* $\lim a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbf{N}\}$.

(b) *Není-li posloupnost* $\{a_n\}$ *shora omezená, je* $\lim a_n = +\infty$.

(ii) *Nechť posloupnost* $\{a_n\}$ *je nerostoucí.*

(a) *Je-li posloupnost* $\{a_n\}$ *zdola omezená, pak* $\lim a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbf{N}\}$.

(b) *Není-li posloupnost* $\{a_n\}$ *zdola omezená, je* $\lim a_n = -\infty$.

Věta 10. *Nechť* $\{a_n\}$ *je posloupnost reálných čísel. Pak existuje vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}$*, která je monotónní.*

Důsledek. *Nechť* $\{a_n\}$ *je posloupnost reálných čísel. Pak existuje vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}$*, která má limitu (vlastní nebo nevlastní).*

Věta 11 (Bolzano-Weierstrass). *Nechť posloupnost* $\{a_n\}$ *je omezená. Pak existuje vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}$*, která je konvergentní.*