II.3. Nevlastní limity

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu plus nekonečno** (píšeme $\lim a_n = +\infty$), jestliže

$$\forall L \in \mathbf{R}\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geq n_0 : a_n > L.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu minus nekonečno** (píšeme $\lim a_n = -\infty$), jestliže

$$\forall K \in \mathbf{R}\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 :\ a_n < K.$$

Poznámka. Chování posloupnosti je možno rozlišit:

$$\lim a_n \begin{cases} \text{existuje} \begin{cases} \textbf{vlastní}\text{, tj. je rovna reálnému číslu} \\ \textbf{nevlastní}\text{, tj. je rovna } +\infty \text{ nebo } -\infty \end{cases} \\ \text{neexistuje} \end{cases}$$

$$\text{Posloupnost } \{a_n\} \begin{cases} \textbf{konverguje}\text{, tj. má vlastní limitu} \\ \textbf{diverguje} \begin{cases} \textbf{diverguje k } +\infty \textbf{ nebo k } -\infty\text{, tj. má nevlastní limitu} \\ \textbf{nemá limitu} \end{cases} \end{cases}$$

Větu 1 (jednoznačnost limity) lze rozšířit i na nevlastní limity (tj. posloupnost nemůže mít za limitu současně $+\infty$ a $-\infty$, stejně tak nemůže mít zároveň vlastní i nevlastní limitu). **Věta 3** (limita vybrané posloupnosti) platí i pro nevlastní limity. **Věta 2** pro nevlastní limity neplatí. Platí však:

Věta 2'.

- *Nechť* $\lim a_n = +\infty$. *Pak posloupnost* $\{a_n\}$ *není shora omezená, je však zdola omezená.*
- *Nechť* $\lim a_n = -\infty$. *Pak posloupnost* $\{a_n\}$ *není zdola omezená, je však shora omezená.*

Definice. **Rozšířenou reálnou osou** rozumíme množinu $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Rozšíření operací a uspořádání z $\mathbf{R}$ na $\mathbf{R}^*$.

$-\infty < a$ a $a < +\infty$ pro $a \in \mathbf{R}$, $\qquad -\infty < +\infty$;

$a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$ pro $a \in \mathbf{R}^* \setminus \{-\infty\}$;

$a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$ pro $a \in \mathbf{R}^* \setminus \{+\infty\}$;

$a - (-\infty) = +\infty$ pro $a \in \mathbf{R}^* \setminus \{-\infty\}$; $\qquad (-\infty) - a = -\infty$ pro $a \in \mathbf{R}^* \setminus \{-\infty\}$;

$a - (+\infty) = -\infty$ pro $a \in \mathbf{R}^* \setminus \{+\infty\}$; $\qquad (+\infty) - a = +\infty$ pro $a \in \mathbf{R}^* \setminus \{+\infty\}$;

$$a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = \begin{cases} +\infty & \text{pro } a \in \mathbf{R}^*, a > 0, \\ -\infty & \text{pro } a \in \mathbf{R}^*, a < 0; \end{cases}$$

$$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \begin{cases} -\infty & \text{pro } a \in \mathbf{R}^*, a > 0, \\ +\infty & \text{pro } a \in \mathbf{R}^*, a < 0; \end{cases}$$

$\frac{a}{+\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0$ pro $a \in \mathbf{R}$;

$$\frac{+\infty}{a} = \begin{cases} +\infty & \text{pro } a \in (0, +\infty), \\ -\infty & \text{pro } a \in (-\infty, 0); \end{cases} \qquad \frac{-\infty}{a} = \begin{cases} -\infty & \text{pro } a \in (0, +\infty), \\ +\infty & \text{pro } a \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Zbylé operace nejsou definovány. To jest, není definováno:

$$(-\infty)+(+\infty),\quad (+\infty)+(-\infty),\quad (+\infty)-(+\infty),\quad (-\infty)-(-\infty),$$
$$(+\infty)\cdot 0,\quad 0\cdot(+\infty),\quad (-\infty)\cdot 0,\quad 0\cdot(-\infty),$$
$$\frac{+\infty}{+\infty},\quad \frac{+\infty}{-\infty},\quad \frac{-\infty}{-\infty},\quad \frac{-\infty}{+\infty},\quad \frac{a}{0} \text{ pro } a\in\mathbf{R}^*.$$

Věta 4' (aritmetika limit podruhé). *Nechť* $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^*$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}^*$. *Potom platí:*

(i) $\lim (a_n \pm b_n) = A \pm B$, *pokud je pravá strana definována,*
(ii) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, *pokud je pravá strana definována,*
(iii) $\lim a_n/b_n = A/B$, *pokud je pravá strana definována.*

Poznámka: Věta 4' dává vzorec pro výpočet uvedených limit za předpokladu, že limity posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ existují (vlastní nebo nevlastní) a příslušný výraz je definován. Neříká nic o tom, co se děje v případě, že limity neexistují, nebo sice existují, ale výraz na pravé straně definován není. V takovém případě se může stát leccos – limita existovat může a nemusí. K určení toho, zda existuje, a případně k jejímu výpočtu je třeba použít jiných metod než Větu 4'.

Věta 5 (limita a uspořádání) a **Věta 6** (o dvou policajtech) platí pro nevlastní limity též. Dokonce platí:

Věta 6' (o jednom policajtovi). *Nechť* $\{a_n\}$ *a* $\{b_n\}$ *jsou posloupnosti.*

(i) *Nechť existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro* $n \geq n_0$ *platí* $a_n \leq b_n$, *a dále platí* $\lim a_n = +\infty$. *Pak* $\lim b_n = +\infty$.
(ii) *Nechť existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro* $n \geq n_0$ *platí* $a_n \geq b_n$, *a dále platí* $\lim a_n = -\infty$. *Pak* $\lim b_n = -\infty$.

Věta 8 (doplňky k aritmetice limit). *Nechť* $\{a_n\}$ *a* $\{b_n\}$ *jsou dvě posloupnosti.*

(1) *Je-li* $\lim a_n = +\infty$ *a* $\{b_n\}$ *je zdola omezená, pak* $\lim(a_n + b_n) = +\infty$.
(2) *Je-li* $\lim a_n = -\infty$ *a* $\{b_n\}$ *je shora omezená, pak* $\lim(a_n + b_n) = -\infty$.
(3) *Je-li* $\lim a_n = +\infty$ *a existuje takové* $c > 0$ *a takové* $n_0 \in \mathbf{N}$, *že pro všechna přirozená* $n \geq n_0$ *je* $b_n \geq c$, *pak* $\lim a_n b_n = +\infty$.
(4) *Je-li* $\lim a_n > 0$ *(tj. limita existuje a je buď* $+\infty$ *nebo kladné reálné číslo),* $\lim b_n = 0$ *a existuje takové* $n_0 \in \mathbf{N}$, *že pro všechna přirozená* $n \geq n_0$ *je* $b_n > 0$, *pak* $\lim \frac{a_n}{b_n} = +\infty$.
(5) *Je-li posloupnost* $\{a_n\}$ *omezená a* $\lim |b_n| = +\infty$, *pak* $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$.

Tvrzení analogická tvrzením (3) a (4) platí i pro ostatní kombinace znamének.