

IV.2 Další vlastnosti limit funkcí

Věta 4 (aritmetika limit). Nechť $c \in \mathbf{R}^*$ a f, g jsou funkce, které splňují $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A \in \mathbf{R}^*$ a $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = B \in \mathbf{R}^*$. Potom platí:

- (i) $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = A + B$, pokud je výraz $A + B$ definován,
- (ii) $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = AB$, pokud je výraz AB definován,
- (iii) $\lim_{x \rightarrow c} f(x)/g(x) = A/B$, pokud je výraz A/B definován.

Důsledek. Nechť funkce f a g jsou spojité v bodě $a \in \mathbf{R}$. Pak také funkce $f + g$ a fg jsou spojité v bodě a . Pokud navíc $g(a) \neq 0$, pak také funkce f/g je spojitá v bodě a .

Věta 5 (o srovnání). Nechť $c \in \mathbf{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A \in \mathbf{R}^*$ a $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = B \in \mathbf{R}^*$.

- (i) Jestliže $A > B$, pak existuje prstencové okolí $P(c, \delta)$ takové, že pro každé $x \in P(c, \delta)$ platí $f(x) > g(x)$.
- (ii) Jestliže existuje prstencové okolí $P(c, \delta)$ takové, že pro každé $x \in P(c, \delta)$ platí $f(x) \leq g(x)$, pak platí $A \leq B$.

Věta 6 (o policajtech). Nechť $a \in \mathbf{R}^*$.

(i) Nechť f, g, h jsou funkce, pro které platí:

- Existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in P(a, \delta)$ platí $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Potom existuje rovněž $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ a rovná se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

(ii) Nechť f a g jsou funkce, pro které platí:

- Existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$ takové, že pro $x \in P(a, \delta)$ platí $f(x) \leq g(x)$.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

Potom také $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$.

(iii) Nechť f a g jsou funkce, pro které platí:

- Existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$ takové, že pro $x \in P(a, \delta)$ platí $f(x) \geq g(x)$.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Potom také $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$.

Věta 7 (doplňky k aritmetice limit). Nechť f a g jsou funkce a $c \in \mathbf{R}^*$.

(a) Je-li $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ a funkce g je omezená na $P(c, \delta)$ pro nějaké $\delta > 0$, pak $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = 0$.

(b) Je-li $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ a funkce g je kladná na $P(c, \delta)$ pro nějaké $\delta > 0$, pak $\lim_{x \rightarrow c} f(x)/g(x) = +\infty$.

Věta 8 (o limitě složené funkce). Necht funkce f a g splňují:

- (i) $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = A$,
- (ii) $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$.

Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek

- (S) f je spojitá v A ,
- (P) $\exists \eta > 0 \forall x \in P(c, \eta) : g(x) \neq A$,

pak $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = B$.

Důsledek (spojitost složené funkce). Necht funkce g je spojitá v bodě $a \in \mathbf{R}$ a funkce f je spojitá v bodě $g(a)$. Pak funkce $f \circ g$ je spojitá v bodě a .

Poznámka. Zřejmé analogie Vět 2 až 7 platí pro limity zleva a zprava. Podobně analogie důsledků Věty 3 a Věty 4 platí i pro spojitost zleva a zprava. Svě analogie pro jednostranné limity má i Věta 8. Jedna z variant Věty 8 pro jednostranné limity je tato:

Necht funkce f a g splňují:

- (i) $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = A$,
- (ii) $\lim_{y \rightarrow A+} f(y) = B$.

Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek

- (S) f je spojitá v bodě A zprava a navíc $\exists \eta > 0 \forall x \in P(c, \eta) : g(x) \geq A$,
- (P) $\exists \eta > 0 \forall x \in P(c, \eta) : g(x) > A$,

pak $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = B$.

Věta 9 (o limitě monotonní funkce). Necht funkce f je monotonní na (a, b) , kde $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$. Potom existují $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$.

Věta 10 (Heine). Necht $c, A \in \mathbf{R}^*$ a $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$. Necht $\{x_n\}$ je posloupnost reálných čísel splňujících $x_n \neq c$ pro každé $n \in \mathbf{N}$ a $\lim x_n = c$. Pak $\lim f(x_n) = A$.

Poznámky.

- (1) Analogická tvrzení platí pro limitu zleva a limitu zprava. (Pro limitu zprava se předpoklad $x_n \neq c$ nahradí předpokladem $x_n > c$.)
- (2) Platí i obrácení Věty 10: Jestliže f je definována na $P(c, \delta)$ pro nějaké $\delta > 0$ a pro každou posloupnost $\{x_n\}$ prvků D_f různých od c splňující $\lim x_n = c$ platí $\lim f(x_n) = A$, pak $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$.

Možná srozumitelnější je obměna: Je-li f definována na $P(c, \delta)$ pro nějaké $\delta > 0$ a přitom A není limitou funkce f v bodě c , pak existuje posloupnost $\{x_n\}$ prvků D_f různých od c , pro kterou platí $\lim x_n = c$, ale A není limitou posloupnosti $\{f(x_n)\}$.

Podobně pro jednostranné limity.