K oddílu VI.1 (první část) – matice a základní operace s nimi

Pojem matice a typy matic

- Matice je obdélníková tabulka čísel. Matice je typu $m \times n$, pokud má m řádků a n sloupců. Například

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

  je matice typu 2×3. Prvky matice $\mathbb{A}$ (tedy čísla vyskytující se v té tabulce) označujeme například a_{ij}. Přitom a_{ij} označuje prvek v i-tém řádku a j-tém sloupci. Pro uvedenou matici je například $a_{11} = 1$, $a_{13} = 3$, $a_{23} = 7$.

- Jak je řečeno výše, matice je obdélníková tabulka čísel. Záleží nejen na tom, jaká čísla obsahuje, ale i na jejich poloze a uspořádání. Proč jsou matice důležité, bude zřejmé později - například v oddílech VI.4 a VI.5.

- Speciálním případem jsou matice typu $1 \times n$ tvořené jedním řádkem, kterým říkáme řádkové vektory, a matice typu $m \times 1$, tvořené jedním sloupcem, kterým říkáme sloupcové vektory.

- Je-li $\mathbb{A}$ matice typu $m \times n$, pak na každý její řádek se lze dívat jako na řádkový vektor (tj. na matici typu $1 \times n$) a na každý její sloupec se lze dívat jako na sloupcový vektor (tj. na matici typu $m \times 1$). Například výše uvedená matice má dva řádky

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

  a tři sloupce

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

- Čtvercová matice je matice, která má stejný počet řádků a sloupců, tj. ta tabulka má tvar čtverce.

- Speciálním případem jsou i matice typu 1×1, neboli čtvercové matice řádu 1. Ty jsou tvořeny jediným číslem, a tak se s nimi pracuje jako s čísly. (Třebaže formálně to není totéž – číslo a tabulka obsahující toto číslo.)

- Struktura a speciální typy čtvercových matic.
  - Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n. Její (hlavní) diagonálou rozumíme n-tici prvků

    $$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}.$$

    Jsou to právě prvky na geometrické diagonále (úhlopříčce) čtvercové tabulky spojující levý horní a pravý dolní roh. V následujících maticích jsou prvky na diagonále vyznačeny červeně.

    $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -5 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2. \end{pmatrix}$$

  - Čtvercová matice se nazývá diagonální, pokud všechny její prvky mimo diagonálu jsou nulové. Příklady diagonálních matic:

    $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

  - Dalšími speciálními typy čtvercových matic jsou trojúhelníkové matice. Rozlišujeme horní trojúhelníkové matice, které mají pod diagonálou všechny prvky nulové, například

    $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix};$$

    a dolní trojúhelníkové, které mají nad diagonálou všechny prvky nulové, například

    $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ -8 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

    Trojúhelníkové matice budou hrát důležitou roli (nejen) v oddílu VI.3.

Základní operace a Věta VI.1

- Součet dvou matic je definován pro matice stejného typu. Sčítáme je „po složkách“. To znamená, že na místě ij (tj., v i-tém řádku a j-tém sloupci) výsledné matice bude součet prvků na místě ij výchozích matic. Příklad:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & -2+1 & 3+1 \\ 0+0 & 1+0 & 7-1 \end{pmatrix}$$

- Násobek matice číslem je též definován „po složkách“. To znamená, že každý prvek matice vynásobíme příslušným číslem. Například:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 7 \end{pmatrix}$$

- Věta VI.1 a následující poznámky: Tato věta plyne z toho, že operace jsou definovány „po složkách“, a z vlastností reálných čísel (viz oddíl I.3, první skupina vlastností). Platí i pro komplexní matice, protože i komplexní čísla splňují vlastnosti z první skupiny.