I. Spočtěte následující limity
(kombinujte l'Hospitalovo pravidlo a elementární metody)

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2}$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$ **3.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{3\operatorname{tg} 4x - 12\operatorname{tg} x}}{3\sqrt[3]{\sin 4x - 4\sin x}}$ **4.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{x\operatorname{cotg} x - 1}{x^2}$ **5.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2\sin^2 x - 1}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x(e^x+1) - 2(e^x-1)}{x^3}$ **7.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}$ **8.** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$ **9.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4 \cos^3 x}$

10. $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a}\right)^{\operatorname{cotg}(x-a)}$ **11.** $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(\sqrt{a}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{b}}\right)$, $a > 0$, $b > 0$

12. $\lim\limits_{x\to a} \frac{a^x - x^a}{x - a}$, $a > 0$ **13.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left((x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}}\right)$ **14.** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\arcsin x} - \frac{1}{\sin x}\right)$

15. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ **16.** $\lim\limits_{x\to 0+} x^{(x^x - 1)}$ **17.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$ **18.** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$

19. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{2}{\sin^4 x} + \frac{1}{\operatorname{tg}^4 x} - \frac{3}{x^4}\right)$ **20.** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\arcsin^4 x} - \frac{2}{x^4}\right)$ **21.** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cos(x^2) + \sin(x^5)\right)^{\frac{1}{(1-\cos x)^2}}$

22. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x}{2}\right)^{\frac{1}{(\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x)^2}}$ **23.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1}\frac{\ln(e^x + x)}{x}\right)$

Výsledky a návody. **1.** 1 (Lze i bez l'Hospitalova pravidla. $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.) **2.** 2 **3.** $-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}$ (l'Hospitalovo pravidlo je vhodné použít na limitu třetí mocniny funkce ze zadání, následně se použije věta o limitě složené funkce.) **4.** $4\frac{\pi - 4}{\pi^2}$ (dosazením, l'Hospitalovo pravidlo není třeba, a navíc ho použít nelze) **5.** $\frac{1}{3}$ (Lze i elementárně - pomocí rozšíření a převedení na limitu v 0.) **6.** $\frac{1}{6}$ **7.** $\frac{1}{6}\log a$, $a > 0$ **8.** -2 **9.** $\frac{1}{6}$ (Před použitím l'Hospitalova pravidla je vhodné použít větu o aritmetice limit k odstranění výrazu $\cos^3 x$ ve jmenovateli.) **10.** $\exp(\frac{1}{\sin a \cos a})$, $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (Není třeba l'Hospitalovo pravidlo, pokud známe vzoreček pro $\operatorname{tg}(x - y)$.) **11.** $\frac{a-b}{3ab}$ **12.** $a^a(\log a - 1)$ pro $a > 0$ (Není nutné přímo l'Hospitalovo pravidlo, stačí použít definici derivace pro funkci $x \mapsto a^x - x^a$ v bodě $x = a$.) **13.** a (Vytkněte vhodný člen a alespoň zpočátku používejte elementární metody výpočtu limit.) **14.** 0 **15.** $e^{-\frac{1}{3}}$ **16.** 1 (l'Hospitalovo pravidlo není třeba) **17.** $-\frac{e}{2}$ **18.** $-\frac{1}{3}$ **19.** $\frac{16}{15}$ (Tento příklad není úplně vhodné počítat l'Hospitalovým pravidlem, i když možné to je. tg vyjádříme jako $\frac{\sin}{\cos}$, převedeme na společného jmenovatele a dle věty o aritmetice limit ukážeme, že jmenovatel lze nahradit x^8. Pak použijeme l'Hospitalovo pravidlo šestkrát po sobě, přičemž po každém použití výraz rozdělíme na součet dvou výrazů, z nichž limitu jednoho je možné spočítat elementárními metodami a na výpočet limity druhého se znovu použije l'Hospitalovo pravidlo.) **20.** $\frac{2}{9}$ (Tento příklad není vhodné počítat l'Hospitalovým pravidlem. Po převedení na společného jmenovatele lze podle věty o aritmetice limit nahradit jmenovatele výrazem x^{12}. Před dalším zjednodušením je nejspíše třeba l'Hospitalovo pravidlo použít třikrát, příslušné výrazy jsou velmi dlouhé. Limitu lze spočítat pomocí Taylorova polynomu.) **21.** $\frac{1}{e^2}$ **22.** $\sqrt[8]{e}$ **23.** $-\frac{1}{6}$ (l'Hospitalovo pravidlo není třeba. Ukažte nejprve, že lze vynechat zlomek $\frac{\ln(e^x + x)}{x}$, a pak spočtěte pomocí vhodného rozšíření.)

II. Taylorův polynom

Najděte Taylorův polynom k-tého řádu v bodě 0 pro funkce

1. $\operatorname{tg} x$, $k=6$. **2.** $\cos(\sin x)$, $k=5$. **3.** $\sin(\sin x)$, $k=6$. **4.** $\sin(1-\cos x)$, $k=3$.
5. funkce $(1+x)^{1/x}$ spojitě dodefinovaná v nule, $k=3$.
6. $\frac{1}{1+x^2}$, $k\in\mathbb{N}$ **7.** $\operatorname{arctg} x$, $k\in\mathbb{N}$. **8.** $\arcsin x$, $k\in\mathbb{N}$.

Spočtěte limity

9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{\frac{-x^2}{2}}}{x^4}$ **10.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$ **11.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}$ $(a>0)$ **12.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-4x-2x^3}-\sqrt[3]{1-6x+3x^2}-x^2}{\sin x-x}$ **14.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt[6]{x^{18}+x^{15}}-\sqrt[6]{x^{18}-x^{15}}\right)$

15. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$ **16.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-(1-x)^{-1/x}+ex}{x(1-\cos x)}$

17. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$ **18.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right)$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+x\sin x)-e^{x\sin x}+\cos(x\sin x)}{\sin^4 x}$ **20.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(e^{x^2}-1)+2\sin(\cos x-1)}{\log(1+x^4)}$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x\sin x}-\cos(\sin x)+3\cos x-3\cos(x^2)}{\sin^4 x}$ **22.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2\sin x)-2\sin(\sin x)+\sin^3 x}{x(1-\cos(x^2))}$

Další úlohy

23. Najděte $n\in\mathbb{N}$, aby limita a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\sin x)-\sin(\operatorname{tg} x)}{x^n}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^x-1}{x^n}$
c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\operatorname{tg} x)}{x^n}$, d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^n}$ byla konečná a různá od 0, a spočtěte tuto limitu.
24. Najděte $a,b\in\mathbb{R}$, aby $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-(a+b\cos x)\sin x}{x^4}=0$.
25. Najděte $a,b\in\mathbb{R}$, aby $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-a\sin x-b\operatorname{tg} x}{x^4}=0$ a spočtěte $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-a\sin x-b\operatorname{tg} x}{x^5}$.

Výsledky a návody. **1.** $x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5$ **2.** $1-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4$ **3.** $x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{10}x^5$ **4.** $\frac{1}{2}x^2$ **5.** $e-\frac{e}{2}x+\frac{11}{24}ex^2-\frac{7}{16}ex^3$ **6.** $T^0_{2k}(x)=T^0_{2k+1}(x)=\sum_{j=0}^k(-1)^j x^{2j}$ (Lze použít buď známý rozvoj funkce $(1+x)^{-1}$ nebo použít součet geometrické řady a druhou implikace ve větě o Peanově tvaru zbytku.) **7.** $T^0_{2k-1}(x)=T^0_{2k}(x)=\sum_{j=1}^k\frac{(-1)^{j-1}}{2j-1}x^{2j-1}$. (Lze odvodit z předchozího příkladu díky tomu, že derivace funkce $\operatorname{arctg} x$ je $\frac{1}{1+x^2}$. **8.** $T^0_{2k-1}(x)=T^0_{2k}(x)=\sum_{j=1}^k\binom{-1/2}{j-1}\frac{x^{2j-1}}{2j-1}$. (Derivace funkce $\arcsin x$ je $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ a její rozvoj známe.) **9.** $-\frac{1}{12}$ **10.** $\frac{1}{3}$ **11.** $\log^2 a$ **12.** $\frac{1}{3}$ **13.** -26 **14.** $-\frac{1}{3}$ (Nejprve je vhodné vytknout x^3 a pak převést na limitu v nule. Lze spočítat i přímo a elementárně, pomocí vhodného rozšíření.) **15.** $-\frac{1}{4}$ (Ze závorky je vhodné vytknout $\sqrt{x}$ a pak převést na limitu v nule. Lze spočítat i elementárně, pomocí dvojího vhodného rozšíření, takový postup je početně náročnější.) **16.** $-\frac{7}{4}e$ **17.** $\frac{1}{2}$ **18.** $\frac{1}{6}$ (Nejprve je vhodné vytknout x^3 a pak převést na limitu v nule.) **19.** $-\frac{3}{2}$ (Výpočet se značně zjednoduší, provedeme-li „substituci“ $y=x\sin x$, tj. pokud patřičně použijeme větu o limitě složené funkce.) **20.** $\frac{7}{12}$ **21.** $\frac{7}{4}$ **22.** $\frac{1}{2}$ **23.** (a) $n=7$, limita je $\frac{1}{30}$; (b) $n=2$, limita je 1; (c) $n=4$, limita je $\frac{1}{3}$; (d) $n=1$, limita je $\frac{e}{2}$. **24.** $a=\frac{4}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$ **25.** $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{3}$, limita vyjde $-\frac{1}{20}$

III. Mocninné řady

Najděte poloměr konvergence a vyšetřete konvergenci mocninných řad

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ **2.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ **3.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n+(-2)^n}{n^2}(z-1)^n$, **4.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+(-1)^n)^n}{n} z^n$, **5.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$,

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-4)^n}{a^n-b^n}$, $a, b > 0$ **7.** $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}) z^n$, $a, b > 0$.

Sečtěte následující mocninné řady na intervalu konvergence

8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} z^n$ **9.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} z^n$ **10.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2+1)}{(2n)!} z^{2n}$ **11.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^n$ **12.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n!} z^{2n}$

13. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ **14.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ **15.** $\sum_{k=1}^{\infty} k x^k$ **16.** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^2 x^k$ **17.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

18. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k(k+1)}$ **19.** $\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) x^k$ **20.** $1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k$ **21.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{(4k)!}$

Výsledky a návody. **1.** $R = 1$, řada konverguje na uzavřeném kruhu $\overline{U}(0,1)$ (absolutně i na kružnici). **2.** $R = 1$, řada konverguje absolutně na otevřeném kruhu $U(0,1)$, v bodě 1 diverguje, v ostatních bodech kružnice $|z| = 1$ konverguje neabsolutně. **3.** $R = \frac{1}{6}$, řada konverguje absolutně na uzavřeném kruhu $\overline{U}(1, \frac{1}{6})$. **4.** $R = \frac{1}{6}$, řada konverguje absolutně na otevřeném kruhu $U(1, \frac{1}{6})$, v bodech $\pm\frac{1}{6}$ diverguje, v ostatních bodech kružnice $|z| = \frac{1}{6}$ konverguje neabsolutně. **5.** $R = 4$ (z podílového kritéria), řada konverguje absolutně na otevřeném kruhu $U(0,4)$, na kružnici $|z| = 4$ diverguje, protože nesplňuje nutnou podmínku konvergence (lze spočítat pomocí Stirlingova vzorce). **6.** Pro $a = b$ nemá smysl. Pro $a \neq b$ je $R = \max\{a, b\}$, pro $a = b$ nemá smysl, řada konverguje absolutně na otevřeném kruhu $U(0, R)$, na kružnici $|z| = R$ diverguje, protože nesplňuje nutnou podmínku konvergence. **7.** Je-li $a < b$, pak $R = \frac{1}{b}$ a řada konverguje absolutně na uzavřeném kruhu $\overline{U}(1, \frac{1}{b})$. Je-li $a \geq b$, pak $R = \frac{1}{a}$, řada konverguje absolutně na otevřeném kruhu $U(1, \frac{1}{a})$, diverguje pro $z = \frac{1}{a}$ a v ostatních bodech kružnice $|z| = \frac{1}{a}$ konverguje neabsolutně. **8.** $\frac{\frac{z}{3}}{(1-\frac{z}{3})^2}$ na $(-3, 3)$ (lze využít derivaci řady člen po členu). **9.** Pro $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je součet $(z^2+1)\exp(-z) + \frac{\exp(-z)-1}{z}$, pro $z = 0$ je součet 0. (Lze buď několikrát využít derivaci řady člen po členu nebo $\frac{n^3}{(n+1)!}$ vyjádřit jako součet zlomků s faktoriálem ve jmenovateli a konstantou v čitateli.) **10.** $(1 - \frac{z^2}{2}) \cos z - \frac{z}{2} \sin z$ na $\mathbb{R}$ **11.** $\cos(\sqrt{z})$ na $[0, \infty)$, $\cosh(\sqrt{-z})$ na $(-\infty, 0]$ **12.** $(1+2z^2)\exp(z^2)$ na $\mathbb{R}$ **13.** $\log(1+x) + \log(1-x)$ na $(-1,1)$ **14.** $\operatorname{arctg} x$ na $(-1,1)$ **15.** $\frac{x}{(1-x)^2}$ na $(-1,1)$ **16.** $\frac{x(x-1)}{(1+x)^3}$ na $(-1,1)$ **17.** $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ na $\mathbb{R}$ **18.** $1 + \frac{1-x}{x}\log(1-x)$ dodefinované v nule nulou, na $(-1,1)$ (lze využít derivace člen po členu a následné integrace). **19.** $\frac{2x}{(1-x)^3}$ na $(-1,1)$ **20.** $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ na $(-1,1)$ (je třeba v tom rozpoznat příslušnou Taylorovu řadu). **21.** $\frac{1}{2}(\cos x + \cosh x)$ na $\mathbb{R}$

IV. Ukázkové příklady pro 1.test

Určete následující limity:

1. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\right)$ **2.** $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg} x+\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)$ **3.** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\operatorname{cotg} x}$ **4.** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{cotg} x-\frac{1}{x}+\frac{x}{3}}{x^3}$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x-\frac{x^3}{3}}{x^5}$ **6.** $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\sin x}{\operatorname{arctg} x-\operatorname{tg} x}$ **7.** Určete $T^{\operatorname{cotg}}_{3,\frac{\pi}{2}}$.

8. Určete poloměr konvergence R mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ (kde $z, z_0\in\mathbb{C}$, $a_n\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}_0$) a vyšetřete konvergenci dané řady v bodech z_0+R, z_0-R, je-li: (i) $a_n=\frac{3^n+(-2)^n}{n}$, $z_0=-1$; (ii) $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$, $z_0=0$; (iii) $a_n=\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}$, $z_0=0$, $a\in(0,\infty)$.

9. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right)\left(\operatorname{arctg}(2-\frac{1}{n})\right)\, i^n\,(z-i)^n$, kde $z\in\mathbb{C}$.

10. Rozviňte funkce $f(z)=\frac{1}{1-z}$, $g(z)=\frac{1}{(1-z)^2}$ a $h(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$ v mocninné řady se středem v bodě z_0, kde a) $z_0=0$, b) $z_0=-1$, c) $z_0=i$; a stanovte poloměr konvergence těchto řad.

11. Rozviňte funkce $f(z)=\exp(z)$, $g(z)=z\exp(z)$, $h(z)=z^2\exp(z)$ v mocninné řady se středem v bodě z_0, kde a) $z_0=0$, b) $z_0=1$, c) $z_0=-17$; a stanovte poloměr konvergence těchto řad.

12. Rozviňte funkce $f(z)=\cos(z)$, $g(z)=z\cos(z)$, $h(z)=z^2\cos(z)$ v mocninné řady se středem v bodě z_0, kde a) $z_0=0$, b) $z_0=\frac{\pi}{3}$, c) $z_0=\frac{\pi}{4}$, d) $z_0=1$; a stanovte poloměr konvergence těchto řad.

13. Rozviňte následující funkce v mocninnou řadu o středu 0 a určete její poloměr konvergence: a) $f(z)=\sin^2 z$, b) $f(z)=\sin z\cdot\cos z$, c) $f(z)=\cos^3 z$, d) $f(z)=\frac{1}{1+z+z^2}$, e) $f(z)=\frac{1}{1+z+z^2+z^3}$, f) $f(z)=\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}$.

Výsledky a návody. **1.** $\frac{2}{3}$ ($\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$, převedeme na společného jmenovatele, čitatele rozvíjíme do řádu 4.) **2.** 0 ($\operatorname{tg} x=\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2}-x)$, tedy lze počítat $\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg} x-\frac{1}{x}\right)$; cotg vyjádříme jako $\frac{\cos}{\sin}$, převedeme na společného jmenovatele, čitatele rozvíjíme do řádu 2.) **3.** $e^{-\frac{2}{\pi}}$ (Použijeme definici obecné mocniny, limitu exponentu počítáme pomocí elementárních metod, případně l'Hospitalova pravidla.) **4.** $-\frac{1}{45}$ ($\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$, převedeme na společného jmenovatele, čitatele rozvíjíme do řádu 5.) **5.** $\frac{2}{15}$ ($\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$, převedeme na společného jmenovatele, čitatele rozvíjíme do řádu 5.) **6.** $-\frac{1}{2}$ (Je možné nejprve jednou použít l'Hospitalovo pravidlo, pak zjednodušit pomocí elementárních metod a na závěr využít Taylorův polynom řádu 2.) **7.** Protože $\operatorname{cotg} x=\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-x)$, lze využít Taylorův polynom funkce tg v 0. Dle příkladu II/1 je $\operatorname{tg} x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)$ pro $x\to 0$, tedy $\operatorname{cotg} x=\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-x)=(\frac{\pi}{2}-x)+\frac{1}{3}(\frac{\pi}{2}-x)^3+o((\frac{\pi}{2}-x)^4)=-(x-\frac{\pi}{2})-\frac{1}{3}(x-\frac{\pi}{2})^3+o((x-\frac{\pi}{2})^4)$ pro $x\to\frac{\pi}{2}$. Tedy $T^{\operatorname{cotg}}_{3,\frac{\pi}{2}}(x)=-(x-\frac{\pi}{2})-\frac{1}{3}(x-\frac{\pi}{2})^3$. **8.** (i) $R=\frac{1}{3}$, v bodě $-1+\frac{1}{3}$ diverguje, v bodě $-1-\frac{1}{3}$ konverguje neabsolutně. (ii) $R=\frac{1}{e}$, v bodech $\pm\frac{1}{e}$ diverguje, protože není splněna nutná podmínka konvergence (limita se spočte s využitím definice obecné mocniny a Taylorova polynomu pro limitu exponentu). (iii) $R=1$, v bodech ± 1 pro $a>1$ konverguje absolutně (například lze použít limitní srovnávací kritérium a srovnat s řadou $\sum\frac{1}{n^2}$), pro $a\le 1$ diverguje, protože není splněna nutná podmínka konvergence. **9.** Je to mocninná řada o středu i, poloměr konvergence je 1. Konverguje absolutně v kruhu $|z-i|<1$, v bodě $z=0(=i-i)$ diverguje (podle limitního srovnávacího kritéria, lze srovnat s harmonickou řadou), v ostatních bodech kružnice o středu i a poloměru 1 konverguje neabsolutně (pro konvergenci se použije postupně Dirichletovo a Abelovo kritérium, divergence řady absolutních hodnot plyne z divergence v bodě 0), pro $|z-i|>1$ diverguje. **10.** a) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$, $g(z)=f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$, $h(z)=zg(z)=\sum_{n=1}^{\infty}nz^n$, poloměr konvergence 1. b) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n$, $g(z)=f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}(z+1)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+2}}(z+1)^n$, $h(z)=(z+1)g(z)-g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}(z+1)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+2}}(z+1)^n=-\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2^{n+1}}-\frac{n+1}{2^{n+2}}\right)(z+1)^n$, poloměr konvergence 2. c) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-i)^{n+1}}(z-i)^n$, $g(z)=f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1-i)^{n+1}}(z-i)^{n-1}=$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(1-i)^{n+2}}(z-i)^n$, $h(z) = (z-i)g(z) + ig(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1-i)^{n+1}}(z-i)^n + i\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(1-i)^{n+2}}(z-i)^n = \frac{i}{(1-i)^2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{(1-i)^{n+1}} + i\frac{n+1}{(1-i)^{n+2}}\right)(z-i)^n$, poloměr konvergence $\sqrt{2}$. **11.** Poloměr konvergence je vždy ∞; a) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n-1)!}$, $h(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+2}}{n!} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{(n-2)!}$; b) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!}(z-1)^n$, $g(z) = (z-1)f(z) + f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!}(z-1)^{n+1} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!}(z-1)^n = e + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{(n-1)!} + \frac{e}{n!}\right)(z-1)^n$, $h(z) = (z-1)^2 f(z) + 2(z-1)f(z) + f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!}(z-1)^{n+2} + 2\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!}(z-1)^{n+1} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!}(z-1)^n = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{e}{(n-2)!}(z-1)^n + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e}{(n-1)!}(z-1)^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!}(z-1)^n = e + 3e(z-1) + \sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{e}{(n-2)!} + \frac{2e}{(n-1)!} + \frac{e}{n!}\right)(z-1)^n$ c) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-17}}{n!}(z+17)^n$, $g(z) = (z+17)f(z) - 17f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-17}}{n!}(z+17)^{n+1} - 17\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-17}}{n!}(z+17)^n = -17e^{-17} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{-17}}{(n-1)!} - \frac{17e^{-17}}{n!}\right)(z+17)^n$, $h(z) = (z+17)^2 f(z) - 34(z+17)f(z) + 17^2 f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-17}}{n!}(z+17)^{n+2} - 34\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-17}}{n!}(z+17)^{n+1} + 289\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-17}}{n!}(z+17)^n = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-17}}{(n-2)!}(z+17)^n - 34\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-17}}{(n-1)!}(z+17)^n + 289\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-17}}{n!}(z+17)^n = 289e^{-17} + 255e^{-17}(z+17) + \sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{e^{-17}}{(n-2)!} - \frac{34e^{-17}}{(n-1)!} + \frac{289e^{-17}}{n!}\right)(z+17)^n$ **12.** Poloměr konvergence je vždy ∞; a) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$, $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n+1}$, $h(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n+2}$; b) $f(z) = \cos(z-\frac{\pi}{3})\cos\frac{\pi}{3} - \sin(z-\frac{\pi}{3})\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-\frac{\pi}{3})^{2n} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-\frac{\pi}{3})^{2n+1}$, $g(z) = (z-\frac{\pi}{3})f(z) + \frac{\pi}{3}f(z) = \frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-\frac{\pi}{3})^{2n+1} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-\frac{\pi}{3})^{2n+2} + \frac{\pi}{6}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-\frac{\pi}{3})^{2n} - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-\frac{\pi}{3})^{2n+1} = \frac{\pi}{6} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2\cdot(2n)!} - \frac{\pi\sqrt{3}}{6\cdot(2n+1)!}\right)(z-\frac{\pi}{3})^{2n+1} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2\cdot(2n-1)!} + \frac{(\pi}{6\cdot(2n)!}\right)(z-\frac{\pi}{3})^{2n}$, $h(z) = (z-\frac{\pi}{3})^2 f(z) + \frac{2}{3}\pi(z-\frac{\pi}{3})f(z) + \frac{\pi^2}{9}f(z)$; c) $f(z) = \cos(z-\frac{\pi}{4})\cos\frac{\pi}{4} - \sin(z-\frac{\pi}{4})\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-\frac{\pi}{4})^{2n} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-\frac{\pi}{4})^{2n+1}$, $g(z) = (z-\frac{\pi}{4})f(z) + \frac{\pi}{4}f(z)$, $h(z) = (z-\frac{\pi}{4})^2 f(z) + \frac{\pi}{2}(z-\frac{\pi}{4})f(z) + \frac{\pi^2}{16}f(z)$; d) $f(z) = \cos(z-1)\cos 1 - \sin(z-1)\sin 1 = \cos 1\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-1)^{2n} - \sin 1\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-1)^{2n+1}$, $g(z) = (z-1)f(z) + f(z)$, $h(z) = (z-1)^2 f(z) + 2(z-1)f(z) + f(z)$; **13.** Použijte následující vzorce: a) $\sin^2 z = \frac{1}{2}(1-\cos 2z)$, b) $\sin z\cdot\cos z = \frac{1}{2}\sin 2z$, c) $\sin^3 z = \frac{3}{4}\sin z - \frac{1}{4}\sin 3z$, d) $f(z) = \frac{1-z}{1-z^3}$, e) $f(z) = \frac{1-z}{1-z^4}$, f) $f'(x) = -\frac{2}{1+4x^2}$.

===

V. Vyjádřete primitivní funkce pomocí elementárních funkcí na maximálních intervalech existence

1. $\int x^3 + 2x + \frac{17}{x}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\int 18e^x + 16e^{8x} - \frac{1}{x} + 3\cos x\,\mathrm{d}x$ **3.** $\int \sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}x$ **4.** $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$
5. $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,\mathrm{d}x$ **6.** $\int \sin^7 x\cos x\,\mathrm{d}x$ **7.** $\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ **8.** $\int \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x$ **9.** $\int \mathrm{cotg}\,x\,\mathrm{d}x$
10. $\int \sqrt{x^6}\,\mathrm{d}x$ **11.** $\int |\cos x|\,\mathrm{d}x$ **12.** $\int \arcsin\sin\frac{4x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ **13.** $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\,\mathrm{d}x$ **14.** $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$
15. $\int \mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$ **16.** $\int \mathrm{cotg}^2 x\,\mathrm{d}x$ **17.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+3x^2}$ **18.** $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ **19.** $\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x$ **20.** $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\cos^2(x^3)}$
21. $\int \frac{x}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$ **22.** $\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ **23.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\log x\log\log x}$ **24.** $\int xe^x\,\mathrm{d}x$ **25.** $\int \log x\,\mathrm{d}x$
26. $\int \mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x$ **27.** $\int \frac{\sin x}{e^x}\,\mathrm{d}x$ **28.** $\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$, $a, b\in\mathbb{R}$ **29.** $\int x^\alpha\log x\,\mathrm{d}x$
30. $\int x^3\log^2 x\,\mathrm{d}x$ **31.** $\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ **32.** $\int \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\,\mathrm{d}x$

VÝSLEDKY A NÁVODY. Výsledky jsou uvedeny „až na konstantu“. **1.** $\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 16\log|x|$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$ **2.** $18e^x + 2e^{8x} - \log|x| + 3\sin x$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$ **3.** $-\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}$, na $\mathbb{R}$ **4.** $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$ **5.** $\frac{1}{99(1-x)^{99}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{97(1-x)^{97}}$, na $(-\infty,1)$ a na $(1,\infty)$ (substituce „$y = 1-x$“) **6.** $\frac{1}{8}\sin^8 x$ na $\mathbb{R}$ **7.** $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$ na $\mathbb{R}$ **8.** $-\log|\cos x|$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **9.** $\log|\sin x|$ na každém z intervalů $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **10.** $\frac{1}{4}|x|\cdot x^3$, na $\mathbb{R}$ **11.** $\sin\left(x - \pi\cdot\left[\frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}\right]\right) + 2\cdot\left[\frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}\right]$, na $\mathbb{R}$ **12.**

$$F(x) = \begin{cases} 2\log(1+x^2) + \pi(x_2-x_1) + 4\log\frac{x_1}{x_2} & x\in[-\infty,-x_2] \\ -\pi(x+x_1) - 2\log(1+x^2) + 4\log(\frac{4}{\pi}x_1) & x\in[-x_2,-x_1] \\ 2\log(1+x^2) & x\in[-x_1,x_1] \\ \pi(x-x_1) - 2\log(1+x^2) + 4\log(\frac{4}{\pi}x_1) & x\in[x_1,x_2] \\ 2\log(1+x^2) + \pi(x_2-x_1) + 4\log\frac{x_1}{x_2} & x\in[x_2,\infty] \end{cases} \quad \text{a} \quad \begin{array}{l} x_1 = \frac{4-\sqrt{16-\pi^2}}{\pi} \\ x_2 = \frac{4+\sqrt{16-\pi^2}}{\pi} \end{array},\ \text{na}$$

$\mathbb{R}$ **13.** $\frac{-10\cdot 5^{-x}\log 2 + 2^{-x}\log 5}{5\log 5\log 2}$, na $\mathbb{R}$ **14.** $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x$, na $\mathbb{R}$ **15.** $\operatorname{tg} x - x$, na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **16.** $-\operatorname{cotg} x - x$, na každém z intervalů $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **17.** $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{6}}{2}$, na $\mathbb{R}$ **18.** $\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x$, na $\mathbb{R}$ **19.** $\frac{3}{8}x + \frac{3}{8}\sin x\cos x + \frac{1}{4}\sin x\cos^3 x$, na $\mathbb{R}$ **20.** $\frac{1}{3}\operatorname{tg}(x^3)$, na každém z intervalů $(\sqrt[3]{-\frac{\pi}{2}+k\pi}, \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}+k\pi})$, $k\in\mathbb{Z}$ **21.** $\frac{1}{8}\log(1+4x^2)$, na $\mathbb{R}$ **22.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2)$, na $\mathbb{R}$ **23.** $\log|\log\log x|$, na $(1,e)$ a na (e,∞) **24.** $(x-1)e^x$ na $\mathbb{R}$ **25.** $x\log x - x$ na $(0,\infty)$ **26.** $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$ na $\mathbb{R}$ **27.** $-\frac{1}{2}e^{-x}\cdot(\sin x + \cos x)$, na $\mathbb{R}$ **28.** $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\cdot(a\cos bx + b\sin bx)$ na $\mathbb{R}$, pokud $a^2+b^2\neq 0$; x na $\mathbb{R}$, pokud $a=b=0$ **29.** $\frac{x^{1+\alpha}}{1+\alpha}\cdot\left(\log x - \frac{1}{1+a}\right)$, na $(0,\infty)$ pro $\alpha\neq 1$; $\frac{1}{2}\ln^2 x$, na $(0,\infty)$ pro $\alpha=-1$ **30.** $\frac{1}{4}x^4\ln^2 x - \frac{1}{8}x^4\ln x + \frac{1}{32}x^4$, na $(0,\infty)$ **31.** $2e^{\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x}-1)$, na $(0,\infty)$ (substituce „$y=\sqrt{x}$“) **32.** $x\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{x^2+1}$, na $\mathbb{R}$ (per partes $1\cdot\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$)

===

VI. Spočtěte primitivní funkce

1. $\int\frac{x^{17}-5}{x-1}\,dx$ **2.** $\int\frac{x^{17}-5}{x^2-1}\,dx$ **3.** $\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$ **4.** $\int\frac{x}{x^3-1}\,dx$ **5.** $\int\frac{dx}{x^4+1}$
6. $\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$ pomocí $x=\operatorname{tg} y$ **7.** $\int\frac{x^8+x-1}{x^6+1}\,dx$ **8.** $\int\frac{dx}{(x^2+3x+4)^2}$
9. Pro jaký vztah mezi parametry a, b, $c\in\mathbb{R}$ je primitivní funkce k funkci f racionální, je-li $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}$? **10.** $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$ **11.** $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$ **12.** $\int\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$ **13.** $\int\frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4-x^2}}$
14. $\int\frac{1-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt[3]{x+1}}\,dx$ **15.** $\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx$ **16.** $\int\frac{\exp x}{\exp x+1}\,dx$ **17.** $\int\frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$ **18.** $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$
19. $\int\sqrt{x^2-2x-1}\,dx$ **20.** $\int\frac{(2x+3)\,dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}$ **21.** $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ **22.** $\int\sqrt{x^2-1}\,dx$
23. $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$ **24.** $\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\,dx$ **25.** $\int\frac{1}{\sin x}\,dx$ **26.** $\int\frac{1}{\cos x}\,dx$ **27.** $\int\frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}$
28. $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$ **29.** $\int\frac{dx}{(\sin^2 x+2\cos^2 x)^2}$ **30.** $\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$ **31.** $\int\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx$
32. $\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$ **33.** $\int\frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}\,dx$ **34.** $\int\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$
35. $\int\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$, $\varepsilon>0$ **36.** $\int\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$, $a,b\in\mathbb{R}$

- -

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** $\left(\sum_1^{17}\frac{x^k}{k}\right) - 4\log|x-1|$, $x\in(-\infty,1)$ nebo $x\in(1,+\infty)$ **2.** $\left(\sum_1^{8}\frac{1}{2k}x^{2k}\right) - 2\log|x-1| + 3\log|x+1|$, $x\in(-\infty,-1)$ nebo $x\in(-1,1)$ nebo $x\in(1,+\infty)$ **3.** $x+\frac{1}{6}\log|x| - \frac{9}{2}\log|x-2| + \frac{28}{3}\log|x-3|$, $x\in(-\infty,0)$ nebo $x\in(0,2)$ nebo $x\in(2,3)$ nebo $x\in(3,+\infty)$ **4.** $\frac{1}{6}\log\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, $x\in(-\infty,1)$ nebo $x\in(1,+\infty)$ **5.** $\frac{\sqrt{2}}{8}\log\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1)$ **6.** $\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$ **7.** $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}\log(1+x^2) + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\log(x^2-x\sqrt{3}+1) - \frac{\sqrt{3}+1}{2}\log(x^2+x\sqrt{3}+1) - \frac{3-\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3}) - \frac{3+\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3})$ **8.** $\frac{1}{7}\cdot\frac{2x+3}{x^2+3x+4} + \frac{4\sqrt{7}}{49}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}}$ **9.** $a+2b+3c=0$ **10.** $6\left(\frac{1}{9}u^{(3/2)} - \frac{1}{8}u^{(4/3)} + \frac{1}{7}u^{(7/6)} - \frac{1}{6}u + \frac{1}{5}u^{(5/6)} - \frac{1}{4}u^{(2/3)}\right)$, kde $u=x+1$, $x\in(-1,+\infty)$ **11.** $\log\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$,

$x \in (-1,1)$ **12.** $\log \frac{|u^2-1|}{\sqrt{u^4+u^2+1}} - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}}$, kde $u = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$, $x \in (-\infty,-1)$ nebo $x \in (-1,0)$ nebo $x \in (1,+\infty)$ **13.** $t = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$ **14.** $t = \sqrt[6]{x+1}$ **15.** $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ **16.** $\log(e^x+1)$, $x \in \mathbb{R}$ **17.** $e^x - \log(1+e^x)$ **18.** $\frac{2}{x-\sqrt{x^2+2x+2}} - \log(\sqrt{x^2+2x+2}-x-1)$, $x \in \mathbb{R}$ **19.** $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1} - \log|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}|$, $x \in (-\infty, 1-\sqrt{2})$ nebo $x \in (1+\sqrt{2},+\infty)$ **20.** $\log\frac{t^2-4t+6}{t^2+2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t-2}{\sqrt{2}}$, kde $t = \sqrt{x^2+2x+4}-x$, $x \in \mathbb{R}$ **21.** $\operatorname{argsinh} x = \log(x+\sqrt{x^2+1})$ na $\mathbb{R}$ **22.** $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\log|x+\sqrt{x^2-1}|$ na $(-\infty,-1)$ a na $(1,+\infty)$ **23.** $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x$ na $(-1,1)$ **24.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sin^2 x$ na $\mathbf{R}$ **25.** $-\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|$ na každém z intervalů $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$ **26.** $\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$ **27.** a **28.** substituce $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ **29.** substituce $y = \operatorname{tg} x$ **30.** substituce $y = \cos x$ **31.** substituce $y = \operatorname{tg} x$ **32.** substituce $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ **33.** substituce $y = \operatorname{tg} x$ **34.** substituce $y = \operatorname{tg} x$ **35.** substituce $y = \operatorname{cotg}\frac{x}{2}$ **36.** substituce $y = \operatorname{tg} x$

===

VII. Vypočtěte následující integrály

1. $\int_0^2 |1-x|\,dx$ **2.** $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}$, $\alpha \in (0,\pi)$ **3.** $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$, $\varepsilon \in [0,1)$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$, $ab \neq 0$ **5.** $\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$ **6.** $\int_0^{\log 2} xe^{-x}\,dx$ **7.** $\int_0^{2\pi} x^2\cos x\,dx$
8. $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\log x|\,dx$ **9.** $\int_0^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg} x\,dx$ **10.** $\int_0^{\log 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$ **11.** $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ **12.** $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$
13. $\int_{-1}^1\frac{x\,dx}{x^2+x+1}$ **14.** $\int_1^e (x\log x)^2\,dx$ **15.** $\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,dx$ **16.** $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$
17. $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ **18.** $\int_0^\pi e^x\cos^2 x\,dx$ **19.** $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$, $n \in \mathbf{N}$

- -

Výsledky a návody. **1.** 1 **2.** $\frac{\pi}{2\sin\alpha}$ **3.** $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$, substituce $t = \operatorname{cotg}\frac{x}{2}$ **4.** $\frac{\pi}{2|ab|}$ (např. $t = \operatorname{tg} x$) **5.** $200\sqrt{2}$ **6.** $\frac{1-\log 2}{2}$ **7.** 4π **8.** $2-\frac{2}{e}$ **9.** $\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$ **10.** $2-\frac{\pi}{2}$ **11.** $\frac{1}{16}\pi a^4$ **12.** $\frac{\pi^2}{4}$ **13.** $\frac{1}{2}\log 3 - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$ **14.** $\frac{5e^3-2}{27}$ **15.** $\frac{1+\sqrt{2}}{30}$ **16.** $\frac{\pi}{6}(4\sqrt{3}-3\sqrt{2})$, substituce $t = \operatorname{cotg}\frac{x}{2}$ **17.** $2\pi\sqrt{2}$, např. substituce $t = \operatorname{tg} x$ na $(0,\frac{\pi}{2})$ **18.** $\frac{3}{5}(e^\pi-1)$ **19.** $n!$

===

VIII. Ukázkové příklady pro 2.test

1. Sečtěte mocninnou řadu (i) $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^{n+2}}{n+1}$, $x \in \mathbb{R}$, (ii) $\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} n^2 x^n$, $x \in \mathbb{R}$, (iii) $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$, $x \in \mathbb{R}$, uvnitř intervalu konvergence.

2. Určete $\int f(x)\,dx$ na maximálních otevřených intervalech, kde existuje, je-li:
a) $f(x) = \frac{x^5-x^4-2x^3+5x^2-3x+1}{x^4-3x^3+4x^2-3x+1}$, b) $f(x) = \frac{e^{5x}}{e^{2x}+1}$, c) $f(x) = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$, d) $f(x) = x\sqrt[3]{2x+3}$,
e) $f(x) = \sqrt{x^2+4}$, f) $f(x) = \sqrt{x^2-9}$, g) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-5x+6}}$, h) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x^2}$,
i) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x}$, j) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$, k) $f(x) = \frac{1}{(1+\sin x)(1-\cos x)}$, l) $f(x) = \frac{3+\cos x}{2+\sin x}$,
m) $f(x) = \frac{1}{\sin^4 x}$, n) $f(x) = |\sin x|$, o) $f(x) = \ln\sqrt{x}$, p) $f(x) = (\cos x)(\ln\sin x)$,
q) $f(x) = x^{-2}\ln^2 x$, r) $f(x) = \frac{1-\ln^2 x}{x(2+\ln^2 x)^2}$.

- -

Výsledky a návody. **1.** (i) $-x^2 - x\ln(1-x)$ na $(-1,1)$. Lze vytknout x a pak buď použít známou Taylorovu řadu pro $\ln(1-x)$ nebo použít derivaci člen po členu, součet geometrické řady a výpočet primitivní funkce. (ii) $\frac{x(x-1)}{(1+x)^3}$ na $(-1,1)$. Lze vytknout x a pak vyjádřit jako derivaci jiné mocninné řady. Tento postup lze opakovat ještě jednou, dostaneme pak geometrickou řadu. (iii) $-\frac{\pi\sqrt{3}}{18} - x - \frac{1}{3}\ln(1-x) + \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ na $(-1,1)$. Lze zderivovat člen po členu, dostaneme geometrickou řadu, sečteme a spočteme primitivní funkci, která má v nule hodnotu nula. **2.** Primitivní funkce jsou uvedeny až na konstantu. a) $2x+\frac{1}{2}x^2+\ln|x-1|-\frac{1}{2}(x^2-x+1)-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ na $(-\infty,1)$ a na $(1,\infty)$. b) $\frac{1}{3}e^{3x}-e^x+\operatorname{arctg} e^x$ na $\mathbb{R}$. (Substituce $y = e^x$.) c) $\ln\left|1+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right| - \ln\left|1-\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right| - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ na $(-\infty,-1)$ a na $(1,\infty)$. (Substituce $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.) d) $\frac{3}{28}(2x+3)^{7/3} - \frac{9}{16}(2x+3)^{4/3}$ na $\mathbb{R}$. (Substituce $y = \sqrt[3]{2x+3}$

nebo jen $y = 2x + 3$; nebo vyjádřit $x = \frac{1}{2}(2x+3) - \frac{3}{2}$ a použít první substituční metodu.) e) $-\frac{1}{8}(\sqrt{x^2+4}-x)^2 - 2\ln(\sqrt{x^2+4}-x) + \frac{2}{(\sqrt{x^2+4}-x)^2}$ na $\mathbb{R}$. (Lze použít Eulerovu substituci $y = \sqrt{x^2+4}-x$; nebo také $x = 2\sinh y$.) f) $-\frac{1}{8}(\sqrt{x^2-9}-x)^2 - 2\ln\left|\sqrt{x^2-9}-x\right| + \frac{81}{8(\sqrt{x^2-9}-x)^2}$ na $(-\infty,-3)$ a na $(3,\infty)$. (Lze použít Eulerovu substituci $y = \sqrt{x^2-9}-x$; nebo také $x = 3\cosh y$.) g) $\frac{1}{2}(\sqrt{x^2-5x+6}-x) - \frac{1}{4(5+2(\sqrt{x^2-5x+6}-x))} - \frac{5}{2}\ln\left|5+2(\sqrt{x^2-5x+6}-x)\right|$ na $(-\infty,2)$ a na $(3,\infty)$. (Lze použít např. Eulerovu substituci $y = \sqrt{x^2-5x+6}-x$.) h) $-\ln\left|2(\sqrt{x^2+x+1}-x)-1\right| + \frac{1}{2(\sqrt{x^2+x+1}-x-1)} + \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}-x-1\right| - \frac{3}{2(\sqrt{x^2+x+1}-x+1)} - \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}-x+1\right|$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$. (Lze použít Eulerovu substituci $y = \sqrt{x^2+x+1}-x$.)

i) $F(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x+1}{\sqrt{3}} + \frac{2k\pi}{\sqrt{3}}, & x \in (-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi), k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{3}}, & x = \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$ j) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ k) $-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} - 2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + 2\ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$ na každém z intervalů $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

l) $F(x) = \begin{cases} \ln\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + 2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + 2k\pi\sqrt{3}, & x \in (-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi), k \in \mathbb{Z}, \\ (2k+1)\pi\sqrt{3}, & x = \pi+2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

m) $-\frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x - \operatorname{cotg} x$ na každém z intervalů $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

n) $F(x) = \begin{cases} -\cos x + 4k, & x \in [2k\pi,(2k+1)\pi], k \in \mathbb{Z}, \\ \cos x + 4k + 2, & x \in [(2k+1)\pi,(2k+2)\pi], k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$ o) $\frac{1}{2}(x-1)\ln x$ na $(0,\infty)$. ($\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$ a primitivní funkci k $\ln x$ spočteme per partes.) p) $(\sin x - 1)\ln\sin x$ na každém z intervalů $(2k\pi,(2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. (Substituce $y = \sin x$.) q) $-\frac{1}{x}(\ln^2 x + 2\ln x + 2)$ na $(0,\infty)$. (Per partes.) r) $\frac{3\ln x}{2+\ln^2 x} - \frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{2}}\ln x)$ na $(0,\infty)$. (Substituce $y = \ln x$.)

==

IX. Další příklady na výpočet určitých integrálů

1. $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ **2.** $\int_{e^{-2\pi n}}^1 \left|\cos\log\frac{1}{x}\right|\,dx$ **3.** a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ **4.** $\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$

5. $\int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **6.** $\int_0^1 x^m \log^n x\,dx$ **7.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{2n+1} dx$ **8.** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n}$, $ac - b^2 > 0$

9. $\int_0^{3\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx$ **10.** $\int_0^\pi \frac{\sin x}{\sin\frac{x}{n}}$ **11.** $\int_0^n x^{[x]}\,dx$ ($[x]$ značí celou část čísla x. **12.** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \frac{\cos 2x}{|\sin x - \cos x|}\,dx$

- -

Výsledky a návody. **1.** $\frac{\pi^2}{4}$. (Substituce $x = y + \frac{\pi}{2}$, poté rozdělit na součet dvou integrálů, z nichž jeden je nulový jakožto integrál z liché funkce a druhý se spočte standardním způsobem.) **2.** $\frac{(e^{-\pi}-e^{-(2n+1)\pi})(e^{\pi/2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{\pi})}{1-e^{-\pi}}$. (Nejprve substituce $x = e^y$, poté rozdělit na součet $2n$ integrálů, každý z nich převést pomocí substituce [posunutí] na integrál přes $(0,\pi)$, použít vlastnosti exponenciály a dopočítat.) **3.** Integrály z a) a z b) se rovnají (substituce $x = \frac{\pi}{2} - y$). Označíme-li je I_n, pomocí metody per partes lze odvodit rekurentní vztah $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$. Přitom $I_0 = \frac{\pi}{2}$ a $I_1 = 1$. **4.** Substitucí $x = \sin t$, $t \in (0,2\pi)$ lze převést na I_{2n+1} z předchozího příkladu. **5.** Substitucí $x = \sin t$, $t \in (0,2\pi)$ lze převést na I_n z předminulého příkladu. **6.** Označme integrál $I_{m,n}$. Pak $I_{m,0} = \frac{1}{m+1}$ a pro $n \geq 1$ je $I_{m,n} = -\frac{n}{m+1}I_{m,n-1}$. **7.** $-\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{2}\ln 2$. (Substitucí $y = \operatorname{tg} x$ lze převést na integrál z racionální funkce. Na výsledný integrál lze aplikovat substituce $z = \frac{y-1}{y+1}$ a pak dopočítat.) **8.** Označme integrál I_n. Standardním postupem integrace příslušného parciálního zlomku dostaneme $I_n = \frac{2^{2n+1}a^n}{(4ac-b^2)^{n-\frac{1}{2}}}J_n$, kde $J_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(y^2+1)^n}\,dy$. Přitom $J_1 = \pi$ a pomocí metody per partes lze odvodit vztah $J_{n+1} = \frac{2n}{2n+1}J_n$. **9.** 0 pro n sudé, 3π pro n liché. (Nejprve vyjádříme jako trojnásobek integrálu přes $(0,\pi)$ – použijeme aditivitu Newtonova integrálu a periodičnost [tedy větu o substituci]. Poté vyjádříme jako součet kosinů s využitím vyjádření goniometrických funkcí pomocí komplexní exponenciály.) **10.** 0 pro n sudé, πn^2 pro n liché. (Nejprve provedeme substituci $x = ny$ a pak postupujeme jako v předchozím případě.) **11.** $n^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2-k-1}{k+1}k^{k-1}$. (Rozdělíme na součet integrálů přes intervaly $(k,(k+1))$, $k = 0,\ldots,n-1$.) **12.** -1 (Lze rozdělit na integrál přes intervaly $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})$ a $(\frac{\pi}{4},\frac{5}{6}\pi)$.)

X. Vyšetřete konvergenci (absolutní, neabsolutní) následujících integrálů

1. a) $\int_0^1 x^{\log x}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^1 x^{-\log x}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$ **3.** $\int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$ **4.** $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^{\sqrt{x}}-1}\,\mathrm{d}x$

5. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{e^{\sin x}-1}$ **6.** $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x-\cos x}$ **7.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ **8.** $\int_\alpha^\beta \frac{\arcsin^2(\sin x)}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ **9.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^q x(1-\sin x)^p}$ **11.** $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$ **12.** $\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$ **13.** $\int_e^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$

14. $\int_{e+1}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$ **15.** $\int_0^\infty \frac{x^k}{1+x^t}\,\mathrm{d}x$ **16.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^m}\,\mathrm{d}x$ **17.** $\int_1^\infty x^k\frac{x-\sin x}{x+\sin x}\,\mathrm{d}x$

18. $\int_0^\infty x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x\,\mathrm{d}x$ **19.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^\alpha\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^\beta \operatorname{tg}^\gamma x\,\mathrm{d}x$ **20.** $\int_0^\infty \sin x^2\,\mathrm{d}x$ **21.** $\int_0^\infty 2x\cos\left(x^4\right)\,\mathrm{d}x$

22. $\int_0^\infty \sin(\operatorname{arccotg} x)\sin x\,\mathrm{d}x$ **23.** $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ **24.** $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ **25.** $\int_0^\infty \frac{\sin x\sin 2x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$

26. $\int_0^\infty x^\alpha\ln(1+x)\cos x\,\mathrm{d}x$ **27.** $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x}\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$

- -

Výsledky a návody. **1.** a) diverguje, b) konverguje (absolutně) **2.** konverguje (absolutně) **3.** diverguje **4.** konverguje (absolutně) **5.** konverguje (absolutně) **6.** diverguje **7.** konverguje (absolutně) **8.** konverguje (absolutně), pokud $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, diverguje, je-li jedno z α,β nekonečné **9.** konverguje (absolutně), pokud $p<1$ a $q<1$, jinak diverguje **10.** konverguje (absolutně), pokud $q<1$ a $p<\frac{1}{2}$, jinak diverguje **11.** konverguje (absolutně), pokud $p>1$ a $q<1$, jinak diverguje **12.** konverguje (absolutně), pokud $p>1$ nebo $p=1$ & $q>1$, jinak diverguje **13.** konverguje (absolutně), pokud $p>1$ & $r<1$ nebo $p=1$ & $q>1$ & $r<1$, jinak diverguje **14.** konverguje (absolutně), pokud $p>1$ nebo $p=1$ & $q>1$ nebo $p=q=1$ & $r>1$, jinak diverguje **15.** konverguje (absolutně), pokud $-1<k<t-1$ nebo $-1>k>t-1$, jinak diverguje **16.** konverguje (absolutně), pokud $m<3$, jinak diverguje **17.** konverguje (absolutně), pokud $k<-1$, jinak diverguje **18.** konverguje (absolutně), pokud $\alpha<-1<\alpha+\beta$, jinak diverguje **19.** konverguje (absolutně), pokud $\alpha+\gamma>-1$ a $\beta-\gamma>-1$, jinak diverguje **20.** konverguje neabsolutně (nejprve použijte substituci $y=x^2$, pak konvergence plyne z Dirichletova kritéria, pro divergenci integrálu z absolutní hodnoty využijte odhad $|\sin x|\ge\sin^2 x$ a vyjádření pomocí dvojnásobného argumentu) **21.** konverguje neabsolutně (postup je podobný jako v předchozím příkladu) **22.** konverguje neabsolutně (Dirichletovo kritérium, divergence integrálu z absolutní hodnoty se ukáže podobě jako v přechozích příkladech, navíc se použije ještě jednou srovnávací kritérium) **23.** konverguje absolutně pro $\alpha>1$, neabsolutně pro $\alpha\in(0,1]$, diverguje pro $\alpha\le 0$ (divergence pro $\alpha\le 0$ se ukáže pomocí Bolzano-Cauchyovy podmínky). **24.** konverguje absolutně pro $\alpha\in(1,3)$, jinak diverguje **25.** konverguje absolutně pro $\alpha\in(1,3)$, neabsolutně pro $\alpha\in[0,1)$, jinak diverguje. **26.** konverguje absolutně pro $\alpha\in(-2,-1)$, neabsolutně pro $\alpha\in[-1,0)$, jinak diverguje. **27.** konverguje absolutně

XI. Otevřené a uzavřené množiny, vnitřek, uzávěr ...

1. Rozhodněte, zda následující množiny jsou otevřené ev. uzavřené, zjistěte jejich vnitřek, uzávěr, vnějšek, hranici a derivaci.
(a) $\mathbb{Q}$, (b) $\mathbb{N}$, (c) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, (d) $(-\infty, 0) \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$
Všechny tyto množiny uvažujte (i) v $\mathbb{R}$ s obvyklou metrikou (ii) v rovině ($\mathbb{R}^2$) s euklidovskou metrikou.
2. Rozhodněte, zda následující množiny jsou otevřené ev. uzavřené, zjistěte jejich vnitřek, uzávěr, vnějšek, hranici.

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y \leq 0\}$;
b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 2xy = 5\}$;
c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y > 0, x + y = 2, z \leq 0\}$;
d) $D = \{f \in \mathcal{C}[0, 1] \mid f(\frac{1}{2}) = 2\}$;
e) $E = \{f \in \mathcal{C}[0, 1] \mid f(\frac{1}{2}) \in (0, 2)\}$;
f) $F = \{f \in \mathcal{C}[0, 1] \mid \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0\}$
g) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + y| > x + y\}$
g) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - y| = x - y\}$

3. Platí rovnosti $\overline{U(a, \delta)} = \{x \mid \rho(a, x) \leq \delta\}$ a $\operatorname{int}\{x \mid \rho(a, x) \leq \delta\} = U(a, \delta)$ pro každé $\delta > 0$
a) v každém metrickém prostoru b) v normovaném lineárním prostoru ?
4. Platí následující rovnosti?
(i) $\overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$; (ii) $\overline{M_1 \cap M_2} = \overline{M_1} \cap \overline{M_2}$; (iii) $\operatorname{int} M_1 \cup \operatorname{int} M_2 = \operatorname{int}(M_1 \cup M_2)$;
(iv) $\operatorname{int} M_1 \cap \operatorname{int} M_2 = \operatorname{int}(M_1 \cap M_2)$; (v) $(M')' = M'$;
(vi) $M \subset \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}, s = \sup M \Rightarrow s \in \overline{M}(s \in M', s \in \partial M)$.

Výsledky a návody. (i) V $\mathbb{R}$: (a) Není otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int}\mathbb{Q} = \operatorname{ext}\mathbb{Q} = \emptyset$, $\mathbb{Q}' = \partial\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. (b) Uzavřená, $\mathbb{N}' = \operatorname{int}\mathbb{N} = \emptyset$, $\operatorname{ext}\mathbb{N} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\overline{\mathbb{N}} = \partial\mathbb{N} = \mathbb{N}$. (c) Není otevřená ani uzavřená, vnitřek je $\emptyset$, uzávěr i hranice je $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, vnějšek $\mathbb{R} \setminus (\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\})$, derivace je $\{0\}$. (d) Není otevřená ani uzavřená, vnitřek je $(-\infty, 0)$, uzávěr i derivace $\mathbb{R}$, hranice $[0, \infty)$, vnějšek $\emptyset$. (ii) V rovině (jakožto podmnožiny osy x, kterou značíme $\mathbb{R}$): (a) Není otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int}\mathbb{Q} = \emptyset$, $\operatorname{ext}\mathbb{Q} = \mathbb{R}^2\setminus\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}' = \partial\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. (b) Uzavřená, $\operatorname{int}\mathbb{N} = \emptyset$, $\operatorname{ext}\mathbb{N} = \mathbb{R}^2\setminus\mathbb{N}$, $\overline{\mathbb{N}} = \partial\mathbb{N} = \mathbb{N}$. (c) Není otevřená ani uzavřená, vnitřek je $\emptyset$, uzávěr i hranice je $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, vnějšek $\mathbb{R}^2\setminus(\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}\cup\{0\})$, derivace $\{0\}$. (d) Není otevřená ani uzavřená, vnitřek je $\emptyset$, uzávěr, derivace i hranice $\mathbb{R}$, vnějšek $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}$. **1.** (a) Není otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int} A = \{(x, y) \mid x > 0, y < 0\}$, $\operatorname{ext} A = \{(x, y) \mid x < 0 \text{ nebo } y > 0\}$, $\overline{A} = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$, $\partial A = \{(x, y) \mid (x \geq 0, y = 0) textnebo (x = 0, y \leq 0)\}$. (b) Uzavřená, $\operatorname{int} B = \emptyset$, $\overline{B} = \partial B = B$, $\operatorname{ext} B = \mathbb{R}^2 \setminus B$. (c) Není otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int} C = \emptyset$, $\overline{C} = \partial C = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y = 2, z \leq 0\}$, $\operatorname{ext} C = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{C}$. (d) Uzavřená, $\operatorname{int} D = \emptyset$, $\overline{D} = \partial D = D$, $\operatorname{ext} D = \{f \mid f(\frac{1}{2}) \neq 2\}$. (e) Otevřená, $\operatorname{int} E = E$, $\overline{E} = \{f \mid f(\frac{1}{2}) \in [0, 2]\}$, $\partial E = \{f \mid f(\frac{1}{2}) \in \{0, 2\}\}$, $\operatorname{ext} E = \{f \mid f(\frac{1}{2}) \notin [0, 2]\}$. (f) Uzavřená, $\operatorname{int} F = \emptyset$, $\overline{F} = \partial F = F$, $\operatorname{ext} F = \{f \mid \int_0^1 f \neq 0\}$. (g) Otevřená, $\operatorname{int} G = G$, $\overline{G} = \{(x, y) \mid x + y \leq 0\}$, $\partial G = \{(x, y) \mid x + y = 0\}$, $\operatorname{ext} G = \{(x, y) \mid x + y > 0\}$. (h) Uzavřená, $\operatorname{int} H = \{(x, y) \mid x > y\}$, $\partial H = \{(x, y) \mid x = y\}$, $\operatorname{ext} H = \{(x, y) \mid x < y\}$, $\overline{H} = H$. **2.** V metrickém prostoru platit nemusí (např. diskrétní prostor a $\delta = 1$), ale v NLP platí. **3.** Platí: (i), (iv), (vi) – případ $\overline{M}$ a ∂M. Neplatí: (ii), (iii), (v), (vi) – případ M'.

XII. Spočtěte parciální derivace funkcí všude, kde existují

1. $x^m y^n$ **2.** e^{xy} **3.** $xy + yz + zx$ **4.** $\sqrt{x^2 + y^2}$ **5.** $\sqrt[3]{x^3 + y^3}$ **6.** $|x| \cdot |y|$ **7.** $\sqrt[3]{xy}$
8. $|y - \sin x|$ **9.** $|\sin y - \sin x|$ **10.** $\sqrt[3]{x + y^2}$ **11.** $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y} \cdot \ln(x^2 + y^2)$, $f(0, 0) = 0$
12. $f(x, y) = e^{\frac{-1}{x^2+xy+y^2}}$, $f(0, 0) = 0$ **13.** $\left(\frac{x}{y}\right)^z$ **14.** $x^{\frac{y}{z}}$ **15.** x^{y^z}

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** $\frac{\partial f}{\partial x} = mx^{m-1}y^n$, $\frac{\partial f}{\partial y} = nx^m y^{n-1}$ pro $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. **2.** $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}$ pro $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. **3.** $\frac{\partial f}{\partial x} = y+z$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x+y$, $\frac{\partial f}{\partial z} = x+y$ pro $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. **4.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, pokud $(x,y) \neq (0,0)$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ neexistují. **5.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$, pokud $y \neq -x$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,-x)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,-x)$ neexistují pro $x \neq 0$. **6.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = |y| \operatorname{sgn} x$ pro $x \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = |x| \operatorname{sgn} y$ pro $y \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ pro $y \neq 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ pro $x \neq 0$ neexistují. **7.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}}$ pro $x \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}}$ pro $y \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ pro $y \neq 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ pro $x \neq 0$ neexistují. **8.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\operatorname{sgn}(y - \sin x) \cdot \cos x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \operatorname{sgn}(y - \sin x)$, pokud $y \neq \sin x$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, \sin x)$ neexistuje pro $x \in \mathbb{R}$. $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2} + k\pi, (-1)^k) = 0$ pro $k \in \mathbb{Z}$. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \sin x)$ neexistuje pro $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. **9.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x \operatorname{sgn}(\sin x - \sin y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\cos y \operatorname{sgn}(\sin x - \sin y)$, pokud $\sin x \neq \sin y$. $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+l\pi) = \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+l\pi) = 0$ pro $k, l \in \mathbb{Z}$, $k-l$ sudé. V ostatních bodech parciální derivace neexistují. **10.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+y^2)^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{3\sqrt[3]{(x+y^2)^2}}$, pokud $x \neq -y^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(-x^2, x)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(-x^2, x)$ neexistují pro $x \in \mathbb{R}$. **11.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x \log(x^2+y^2)}{3\sqrt[3]{(x^2+y)^2}} + \frac{2x\sqrt[3]{x^2+y}}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\log(x^2+y^2)}{3\sqrt[3]{(x^2+y)^2}} + \frac{2y\sqrt[3]{x^2+y}}{x^2+y^2}$, pokud $y \neq -x^2$. V $(x, -x^2)$ neexistují parciální derivace pokud $x^2 + x^4 \neq 1$, pokud $x^2 + x^4 = 1$, jsou obě parciální derivace nulové. **12.** $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\frac{-1}{x^2+xy+y^2}} \cdot \frac{2x+y}{(x^2+xy+y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{\frac{-1}{x^2+xy+y^2}} \cdot \frac{x+2y}{(x^2+xy+y^2)^2}$ pro $(x,y) \neq (0,0)$; v bodě $(0,0)$ jsou obě parciální derivace nulové. **13.** Pokud $x, y > 0$ nebo $x, y < 0$, pak $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{z}{y} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{zx}{y^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$; $\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \cdot \log \frac{x}{y}$. **14.** Pokud $x > 0$ a $y \neq 0$, pak $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{z} \cdot x^{\frac{y}{z}-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x^{\frac{y}{z}} \cdot \log x \cdot \frac{1}{z}$; $\frac{\partial f}{\partial z} = -x^{\frac{y}{z}} \cdot \log x \cdot \frac{y}{z^2}$. **15.** Pokud $x, y > 0$, pak $\frac{\partial f}{\partial x} = y^z \cdot x^{y^z-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x^{y^z} \cdot \log x \cdot zy^{z-1}$; $\frac{\partial f}{\partial z} = x^{y^z} \cdot \log x \cdot y^z \cdot \log y$.

==

XIII. Ukázkové příklady pro 3.test

1. Spočtěte integrály a) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin^2 x}$, b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}$, c) $\int_{\pi}^{3\pi} \frac{\mathrm{d}x}{5+2\sin x - \cos x}$, d) $\int_0^{3\pi} \frac{\sin x \cdot \cos x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$, e) $\int_2^3 \frac{x+1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$, f) $\int_1^2 \frac{\sqrt{1+x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$, g) $\int_0^1 \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x$, h) $\int_1^2 \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$, ch) $\int_0^1 \exp\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$, i) $\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x-x^2}}$, j) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+4)}$, k) $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

2. Určete, pro které hodnoty parametrů konvergují (absolutně případně neabsolutně) integrály a) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$, b) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, c) $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, d) $\int_0^{\infty} \frac{x-\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$, e) $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, f) $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}$, g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) \operatorname{tg}^p x\,\mathrm{d}x$, h)* $\int_0^{\infty} (\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}) \cdot x^{-a}\,\mathrm{d}x$, i) $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, j) $\int_0^{\infty} x\cos(x^4)\,\mathrm{d}x$, k)* $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\,\mathrm{d}x$

Výsledky a návody. **1.** **2.** a) $\frac{\pi}{\sqrt{6}}$ (substituce $y=\operatorname{tg} x$); b) $\frac13\ln 2-\frac13\ln(2+\frac{1}{\sqrt2})-\frac16\ln(1-\frac{1}{\sqrt2})+\frac12\ln(1+\frac{1}{\sqrt2})$ (substituce $y=\cos x$); c) $\frac{\pi}{\sqrt5}$ (substituce $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$); d) Integrál neexistuje. Integrand je spojitý na $(0,\frac32\pi)$ a na $(\frac32\pi,3\pi)$, přitom primitivní funkce v bodě $\frac32\pi\pm$ má nevlastní limitu. e) $\frac23\ln 2-\frac13\ln 13+\frac13\ln 7$ (rozložit na parciální zlomky); f) $\sqrt2-\frac{\sqrt3}{2}+\frac12\ln\frac{\sqrt3-1}{\sqrt3+1}-\frac12\ln\frac{\sqrt2-1}{\sqrt2+1}$ (substituce $y=\sqrt{x+1}$); g) 1 (per partes $1\cdot\ldots$); h) $-\frac12\ln^2 2-\ln 2+1$ (substituce $x=e^y$, pak per partes); ch) 2 (substituce $x=y^2$, pak per partes); i) $\frac{\pi}{4}$ (např. substituce $y=\sqrt{\frac{\sqrt2-1-x}{x+1+\sqrt2}}$); j) $\frac{\pi}{6}$ (rozložit na parciální zlomky); k) $\frac{\pi}{2}$ (Eulerova substituce $y=\sqrt{x^2-1}-x$; nebo také nadvakrát, nejprve substituce $y=x^2$ a pak $z=\sqrt{y-1}$). **3.** a) Pro $\alpha\in(1,3)$ konverguje absolutně, pro $\alpha\in(0,1]$ konverguje neabsolutně, jinak diverguje. (U 0+ srovnat s $x^{2-\alpha}$; u $+\infty$ díky symetrické verzi Abelova kritéria nehraje roli $\operatorname{arctg} x$ a to, kdy konverguje (absolutně) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$, víme.) b) Konverguje absolutně. (U 0+ srovnáme například s $\frac{1}{\sqrt{x}}$, v 1− má vlastní limitu.) c) Konverguje absolutně. (U 0+ srovnáme například s $\frac{1}{\sqrt{x}}$, u $+\infty$ například s $x^{-3/2}$.) d) Konverguje absolutně pro $p\in(2,4)$, jinak diverguje. (U 0+ srovnáme s x^{3-p}, u $+\infty$ s x^{1-p}.) e) Konverguje absolutně. (U 0+ srovnáme například s $\frac{1}{\sqrt{x}}$, u $+\infty$ například s $x^{-5/4}$.) f) Konverguje absolutně, pokud $\max\{p,q\}>1$ a $\min\{p,q\}<1$, jinak diverguje. (U 0+ srovnáme s $x^{-\min\{p,q\}}$, u $+\infty$ s $x^{-\max\{p,q\}}$.) g) Konverguje absolutně pro $p\in(-3,1)$, jinak diverguje. (U 0+ srovnáme s x^{2+p}. U $\frac{\pi}{2}-$ pro $p<1$ srovnáme s $(\frac{\pi}{2}-x)^{-\frac{1+p}{2}}$, pro $p\geq1$ s $\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}$.) h) Konverguje absolutně pro $a\in(1,5)$ neabsolutně pro $a\in(0,1]$, jinak diverguje. (U 0+ srovnáme s x^{4-a} s využitím Taylorova rozvoje. U $+\infty$ pro $a>1$ srovnáme s x^{-a}. Pro $a\leq1$ ukážeme, že člen $e^{-\frac{x^2}{2}}$ konvergenci ani absolutní konvergenci neovlivňuje.) i) Diverguje. (U 0+ sice konverguje, protože tam má integrand limitu nula; u $+\infty$ však diverguje, vyjádříme $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$.) j) Konverguje neabsolutně. (Substitucí $x^4=y$ převedeme na integrál z $\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$.) k) Konverguje neabsolutně pro $p\in(0,2)$, jinak diverguje. (Rozdělíme na $\int_1^\infty$ a $\int_0^1$. Nejprve vyšetříme $\int_1^\infty$, v něm provedeme substituci $y=x+\frac1x$ a výsledný integrál vyšetříme podobně jako $\int_1^\infty\frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$. V integrálu $\int_0^1$ provedeme substituci $y=\frac1x$, výsledný integrál bude mít stejný tvar jako $\int_1^\infty$ pro jinou hodnotu p, a tedy můžeme použít výsledek vyšetřování $\int_1^\infty$.)

==

XIV. Limita, spojitost a totální diferenciál funkcí více proměnných

Zjistěte, zda existují limity, a existují-li, spočtěte je

1. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ **2.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$ **3.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$ **4.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$

5. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$ **6.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ **7.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ **8.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x+y)\sin\frac1x\sin\frac1y$

9. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to3}}\frac{\sin xy}{x}$ **10.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$ **11.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2\sin y}{x^2+y^2}$ **12.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{2-\cos x-\cos y}{x^2+y^2}$

13. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x(x^2+y^2)^2}{1-\cos(x^2+y^2)}$ **14.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$ **15.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin(yx^2)}{x^4+y^2}$ **16.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^6}{x^3+y^3}$

Lze následující funkce spojitě rozšířit na celou rovinu ?

17. $\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ **18.** $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ **19.** $\frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}}$ **20.** $\frac{\sin xy}{x}$ **21.** $\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$

22. $(x+y)\sin\frac1x\sin\frac1y$ **23.** $xy\sin\frac1x\sin\frac1y$ **24.** $y^3\sin\frac1x\sin\frac1y$

Určete, v kterých bodech mají následující funkce totální diferenciál (a spočtěte jej)

25. $xy+yz+zx$ **26.** $\sqrt{x^2+y^2}$ **27.** $\sqrt[3]{x^3+y^3}$ **28.** $|x|\cdot|y|$ **29.** $\sqrt[3]{xy}$

30. $|y-\sin x|$ **31.** $|\sin y-\sin x|$ **32.** $\sqrt[3]{x+y^2}$

33. $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2+y}\cdot\ln(x^2+y^2)$, $f(0,0)=0$ **34.** $f(x,y)=e^{\frac{-1}{x^2+xy+y^2}}$, $f(0,0)=0$

Výsledky a návody. **1.** 2 (rozšíříme a pak dosadíme) **2.** 0 (rozšíříme a pak použijeme pravidlo „omezená krát s limitou nula“) **3.** 0 (odhadneme $|\sin(x^3+y^3)| \leq |x^3+y^3| \leq |x|^3+|y|^3$ a pak použijeme pravidlo „omezená krát s limitou nula“) **4.** Neexistuje – funkce není definovaná na prstencovém okolí bodu $(0,0)$. Limita přes množinu $\{(x,y) : x \neq 0 \neq y\}$ je $+\infty$. **5.** 0 **6.** 1 **7.** Neexistuje. **8.** Neexistuje, protože funkce není definovaná na prstencovém okolí bodu $(0,0)$. Limita přes množinu $\{(x,y) : x \neq 0 \neq y\}$ je 0. **9.** Neexistuje, protože funkce není definovaná na prstencovém okolí bodu $(0,3)$. Limita přes množinu $\{(x,y) : x \neq 0\}$ je 3. **10.** 1 **11.** 0 (použijeme pravidlo „omezená krát s limitou nula“) **12.** $\frac{1}{2}$ (je možné použít Taylorův rozvoj druhého řádu pro $\cos(x)$ a pro $\cos(y)$.) **13.** 0 **14.** $+\infty$ (počítáme limitu převrácené hodnoty a použijeme vyjádření $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$) **15.** Neexistuje (po osách je limita 0, po parabole $y=x^2$ je limita $\frac{1}{2}$) **16.** Neexistuje, protože funkce není definovaná na prstencovém okolí bodu $(0,0)$. Limita přes množinu $\{(x,y) : x \neq -y\}$ rovněž neexistuje, protože po osách je limita 0 a po parabole $y=x^2$ je limita 1. **17.** Ne. **18.** Ano. $f(0,0)=0$ **19.** Ano. $f(0,0)=0$ **20.** Ano. $f(0,y)=y$ **21.** Ne, viz příklad 4. **22.** Ne. **23.** Ano, na osách dodefinovat hodnotou 0. **24.** Ne.

Poznámka: V příkladech 25–34 se používají parciální derivace těchto funkcí, které se počítaly v příkladech 3–12 za sady XII. **25.** $df(x,y,z)(u,v,w)=(y+z)u+(x+z)v+(x+y)w$, existuje na $\mathbb{R}^3$. **26.** $df(x,y)(u,v)=\frac{xu}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{yv}{\sqrt{x^2+y^2}}$, na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. **27.** $df(x,y)(u,v)=\frac{x^2u}{(x^2+y^2)^{2/3}}+\frac{y^2v}{(x^2+y^2)^{2/3}}$, na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(a,-a); a \in \mathbb{R}\}$, $df(0,0)$ neexistuje. **28.** $df(x,y)(u,v)=|y|\cdot\operatorname{sgn} x\cdot u+|x|\cdot\operatorname{sgn} y\cdot v$ pro $x \neq 0$, $y \neq 0$. $df(0,0)=0$. **29.** $df(x,y)(u,v)=\sqrt[3]{y}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cdot u+\sqrt[3]{x}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}\cdot v$ pro $x \neq 0$, $y \neq 0$. $df(0,0)$ neexistuje. **30.** $df(x,y)(u,v)=-\operatorname{sgn}(y-\sin x)\cdot\cos x\cdot u+\operatorname{sgn}(y-\sin x)\cdot v$, pokud $y \neq \sin x$. **31.** $df(x,y)(u,v)=\cos x \operatorname{sgn}(\sin x-\sin y)\cdot u-\cos y \operatorname{sgn}(\sin x-\sin y)\cdot v$, pokud $\sin x \neq \sin y$. $df(\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+l\pi)=0$ pro $k,l \in \mathbb{Z}$, $k-l$ sudé. **32.** $df(x,y)(u,v)=\frac{u}{3\sqrt[3]{(x+y^2)^2}}+\frac{2yv}{3\sqrt[3]{(x+y^2)^2}}$, pokud $x \neq -y^2$. **33.** $df(x,y)(u,v)=\left(\frac{2x\log(x^2+y^2)}{3\sqrt[3]{(x^2+y)^2}}+\frac{2x\sqrt[3]{x^2+y}}{x^2+y^2}\right)\cdot u+\left(\frac{\log(x^2+y^2)}{3\sqrt[3]{(x^2+y)^2}}+\frac{2y\sqrt[3]{x^2+y}}{x^2+y^2}\right)\cdot v$, pokud $y \neq -x^2$. $df(a,-a^2)=0$, pokud $a^2+a^4=1$. **34.** $df(x,y)(u,v)=e^{\frac{-1}{x^2+xy+y^2}}\cdot\frac{2x+y}{(x^2+xy+y^2)^2}\cdot u+e^{\frac{-1}{x^2+xy+y^2}}\cdot\frac{x+2y}{(x^2+xy+y^2)^2}\cdot v$ pro $(x,y) \neq (0,0)$. $df(0,0)=0$. Parciální derivace jsou spojité na $\mathbb{R}^2$.