**Konkávní funkce – oddíl V.8 – pokračování**

**K Větě V.23**

- Důležité předpoklady:
  - $G$ je konvexní (aby mělo smysl se ptát, je-li $f$ konkávní).
  - $G$ je otevřená a $f \in C^1(G)$ (abychom mohli dobře pracovat s parciálními derivacemi).
- Význam věty: Je to charakterizace konkávních funkcí mezi funkcemi třídy $C^1$. Tedy – máme-li funkci třídy $C^1$, tato věta říká, jak se pozná, je-li konkávní.
- Význam podmínky (ii):
  - Podmínka se dá přepsat takto:

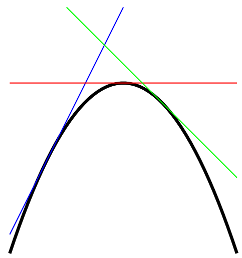
$$\forall x, y \in G : f(y) \leq f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(y_i - x_i)$$

    Pokud zvolíme pevné $x \in G$, pak výraz na pravé straně je funkce (v proměnných $y_1, \dots, y_n$), jejímž grafem je tečná nadrovina ke grafu funkce $f$ v bodě $[X, f(x)]$ (viz oddíl V.5).

    Podmínka tedy říká toto: Ať si zvolím libovolné $x \in G$, graf funkce $f$ leží pod tečnou nadrovinou v bodě $[x, f(x)]$.
  - Je-li $n = 1$, tedy $G$ je otevřený interval, pak podmínka má tvar

$$\forall x, y \in G : f(y) \leq f(x) + f'(x)(y - x),$$

    tedy pro každé $x \in G$ graf funkce $f$ leží pod tečnou v bodě $[x, f(x)]$. To lze znázornit na obrázku:

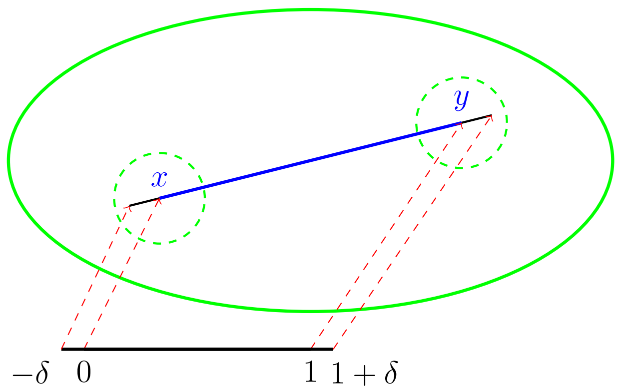


Černě je vyznačen graf funkce $f$, barevně jsou vyznačeny tečny v různých bodech. Funkce $f$ je konkávní a její graf leží pod každou z tečen.

- Význam podmínky (iii):
  - Pokud $n = 1$, $G$ je otevřený interval a podmínka má tvar
  $$\forall x, y \in G : (f'(y) - f'(x))(y - x) \leq 0.$$
  To znamená přesně, že $f'$ je nerostoucí na $G$. To je ovšem podmínka z Věty IV.38 (přesněji z následující poznámky).
  - Pro obecné $n$ je to tedy jakési zobecnění toho, že derivace je nerostoucí.
  - Pro $n = 2$ má podmínka tvar:
  $$\forall x, y \in G : \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right)(y_1 - x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\right)(y_2 - x_2) \leq 0$$
- Důkaz provedeme pro $n = 2$ (obecný případ je téměř stejný).

  $(i) \Rightarrow (ii)$ Předpokládejme, že $f$ je konkávní na $G$. Zvolme $x, y \in G$ a dokažme, že platí uvedená nerovnost.

  Protože $f$ je konkávní, platí
  $$\forall t \in \langle 0, 1\rangle : f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y).$$
  Pokud $t > 0$, odečteme $f(x)$ a výslednou nerovnost vydělíme $t$, čímž dostaneme
  $$\forall t \in (0, 1\rangle : \frac{f((1-t)x + ty) - f(x)}{t} \geq f(y) - f(x). \qquad (*)$$
  Definujme si pomocnou funkci
  $$\varphi(t) = f((1-t)x + ty) = f(x + t(y - x)).$$
  Protože $G$ je otevřená, je $\varphi$ definována na intervalu $(-\delta, 1+\delta)$ pro nějaké $\delta > 0$. Zdůvodníme to pomocí následujícího obrázku:




Zelený ovál ohraničuje množinu $G$ (je otevřená a konvexní). Máme v ní body $x$ a $y$, celá úsečka je obsažena v $G$ (protože je konvexní). Tuto úsečku lze parametrizovat jako

$$x + t(y-x), \quad t \in \langle 0, 1\rangle.$$

Protože $G$ je otevřená, jsou body $x, y$ vnitřní body, tedy existují nějaká jejich okolí, která jsou celá obsažena v $G$ (na obrázku ohraničena zelenými čárkovanými kružnicemi).

Proto, když úsečku $xy$ prodloužíme na přímku, na obou stranách bude ještě kousek ležet v množině $G$. Tuto prodlouženou úsečku můžeme parametrizovat

$$x + t(y-x), \quad t \in (-\delta, 1+\delta)$$

pro vhodné $\delta > 0$. Na tomto intervalu je pak definována funkce $\varphi$.

Funkce $\varphi$ je tedy definována na $(-\delta, 1+\delta)$ a podle (*) splňuje

$$\forall t \in (0, 1\rangle : \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \geq f(y) - f(x).$$

Přechodem k limitě pro $t \to 0+$ (s použitím Věty IV.5 o limitě a nerovnostech) dostaneme

$$\varphi'_+(0) \geq f(y) - f(x), \tag{**}$$

pokud ona derivace existuje.

Zbývá použít Větu V.14: Uvědomme si, že

$$\varphi(t) = f(x_1 + t(y_1 - x_1), x_2 + t(y_2 - x_2)), \quad t \in (\delta, 1+\delta)$$

je podle Věty V.14 třídy $C^1$ na $(\delta, 1+\delta)$ a platí

$$\begin{aligned}\varphi'(t) = {} & \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + t(y_1 - x_1), x_2 + t(y_2 - x_2)) \cdot (y_1 - x_1) \\ & + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1 + t(y_1 - x_1), x_2 + t(y_2 - x_2)) \cdot (y_2 - x_2)\end{aligned}$$

pro $t \in (-\delta, 1+\delta)$. Speciálně, dosazením $t = 0$ dostaneme

$$\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \cdot (y_1 - x_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \cdot (y_2 - x_2)$$

Z této rovnosti a z (**) dostaneme

$$f(y) - f(x) \leq \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot (y_1 - x_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \cdot (y_2 - x_2),$$

což je dokazovaná nerovnost.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Toto je velmi snadné. Předpokládejme, že platí (ii) a vezměme $x, y \in G$. Aplikací (ii) dostaneme

$$f(y) - f(x) \leq \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot (y_1 - x_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \cdot (y_2 - x_2).$$

Pokud aplikujeme (ii) na dvojici $y, x$ (tj. zaměníme role $x$ a $y$), dostaneme

$$f(x) - f(y) \leq \frac{\partial f}{\partial x_1}(y) \cdot (x_1 - y_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(y) \cdot (x_2 - y_2).$$

Pokud sečteme uvedené dvě nerovnosti, dostaneme

$$0 \leq \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(y)\right)(y_1 - x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(y)\right)(y_2 - x_2).$$

Vynásobíme $-1$ a dostaneme

$$0 \geq \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right)(y_1 - x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\right)(y_2 - x_2),$$

což je dokazovaná nerovnost.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Předpokládejme, že platí (iii) a dokažme, že $f$ je konkávní na $G$.

K tomu stačí ukázat, že $f$ je konkávní na každé úsečce obsažené v $G$. Zvolme tedy $a, b \in G$ (různé) a uvažme úsečku $ab$. Stejně jako v důkazu implikace $(i) \Rightarrow (ii)$ víme, že existuje $\delta > 0$, že

$$a + t(b-a) \in G \text{ pro } t \in (-\delta, 1+\delta).$$

K tomu, abychom ukázali, že $f$ je konkávní na úsečce $ab$, stačí ukázat, že pomocná funkce

$$\varphi(t) = f(a + t(b-a))$$

je konkávní na intervalu $(-\delta, 1+\delta)$.

Podle Věty V.14 je $\varphi$ třídy $C^1$ na $(-\delta, 1+\delta)$ a

$$\begin{aligned}\varphi'(t) = {} & \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2)) \cdot (b_1 - a_1) \\ & + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2)) \cdot (b_2 - a_2)\end{aligned}$$

pro $t \in (-\delta, 1+\delta)$. (Totéž jsme počítali již v důkazu implikace $(i) \Rightarrow (ii)$.)

Abychom ukázali, že $\varphi$ je konkávní, podle Věty IV.38 stačí ukázat, že $\varphi'$ je nerostoucí. Zvolme tedy $s, t \in (-\delta, 1+\delta)$ splňující $s < t$ a pokusme se dokázat, že $\varphi'(s) \geq \varphi'(t)$.

Označme $x = a + s(b-a)$ a $y = a + t(b-a)$. Pak

$$\varphi'(t) - \varphi'(s) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right)(b_1 - a_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\right)(b_2 - a_2).$$

Protože

$$y - x = (t-s)(b-a),$$

dostaneme

$$\begin{aligned}\varphi'(t) - \varphi'(s) &= \frac{1}{t-s}\Bigg(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right)(y_1 - x_1) \\ &\qquad + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\right)(y_2 - x_2)\Bigg) \\ &\leq 0\end{aligned}$$

díky předpokladu (ii) a tomu, že $t - s > 0$. Důkaz je tedy hotov.

- Důkaz pro obecné $n$ je stejný, jen příslušné výrazy mají více sčítanců.
- Z důkazu implikace $(iii) \Rightarrow (i)$ je vidět, že je opravdu vztah mezi podmínkou (iii) a Větou IV.38.

**K Důsledku Věty V.23:**

- Důkaz: Pokud $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$ pro každé $i$, pak aplikace bodu (ii) z Věty V.23 dává
$$\forall y \in G : f(y) - f(x) \leq 0,$$
tedy $f$ nabývá v bodě $x$ maxima na $G$.
- Geometrická interpretace: Jsou-li parciální derivace nulové, je tečná nadrovina „vodorovná“, tj. je grafem konstantní funkce. Je-li graf pod touto tečnou nadrovinou, je v bodě dotyku maximum.

**K Větě V.24:** Je zcela analogická Větě V.23, důkaz je stejný, význam analogický. Jen jsou na správných místech ostré nerovnosti. Například, graf je ostře pod tečnou nadrovinou kromě bodu dotyku.