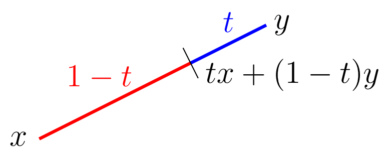
**Konkávní funkce – oddíl V.8**

Uvádím zde vysvětlení a komentáře k oddílu V.8. Znění definic a vět neopisuji, odkazuji na text dostupný na webu.

**K definici konvexní množiny:**

- Konvexní kombinace: Pokud $x, y \in \mathbb{R}^n$ a $t \in [0, 1]$, pak $tx + (1-t)y = x + (1-t)(y-x)$ je bod na úsečce spojující $x$ a $y$, jehož vzdálenost od $x$ je $(1-t)$-násobek vzdálenosti $x$ od $y$ (dělí tedy úsečku v poměru $(1-t) : t$. Ilustruje to následující obrázek.

  Bod $tx + (1-t)y$ dělí úsečku $xy$ v poměru $(1-t) : t$ (červená část ku modré části).

- Proto body $tx + (1-t)y$, $t \in \langle 0, 1\rangle$, vyplňují úsečku $xy$. (Pro $t = 0$ dostaneme bod $y$, pro $t = 1$ bod $x$, pro $t = \frac{1}{2}$ střed úsečky $xy$.)

- Množina $M$ je konvexní, pokud pro každé dva body $x, y \in M$ i celá úsečka $xy$ je obsažena v $M$. To je geometrický význam uvedené analytické definice.

- Příklady konvexních množin: Trojúhelník, čtverec, obdélník, kruh (v rovině)

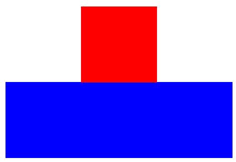
  Konvexní podmnožiny $\mathbb{R}$ jsou: prázdná množina, jednobodové množiny a intervaly (všech typů).

  Obecně množina $B(x, r)$ je konvexní v $\mathbb{R}^n$.

  *Cvičení: Dokažte samostatně s použitím definic a trojúhelníkové nerovnosti.*

- Průnik dvou (nebo i více) konvexních množin je opět konvexní množina. To je zřejmé z definice: *Pokud body $x, y$ patří do průniku množin, pak patří do každé z nich. Jsou-li ty množiny konvexní, pak úsečka $xy$ je obsažena v každé z nich, tedy i v průniku.*

- Sjednocení dvou konvexních množin nemusí být konvexní množina:



Obě množiny – modrá i červená jsou konvexní, jejich sjednocení nikoli.

**K Větě V.20:**

- Důležité předpoklady: $G$ je konvexní (aby obsahovala úsečku $ab$); $G$ je otevřená a $f \in C^1(G)$ (aby šlo použít větu o derivaci složené funkce).

- Důkaz pro $n = 2$:

  - Definujme si pomocnou funkci

    $$\varphi(t) = f(ta+(1-t)b) = f(b+t(a-b)) = f(b_1+t(a_1-b_1), b_2+t(a_2-b_2))$$

    pro $t \in \langle 0, 1\rangle$.

    *Komentář: Je to vlastně funkce $f$ na úsečce $ab$. Je $\varphi(0) = f(b)$, $\varphi(1) = f(a)$, $\varphi(t) =$ hodnota $f$ v příslušném bodě úsečky $ab$.*

    Tato funkce je dobře definována na intervalu $\langle 0, 1\rangle$, protože množina $G$ je konvexní, a tedy úsečka $ab$ je v ní obsažena.
  - Funkce $\varphi$ je spojitá na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Je to složená funkce, kdy vnější funkce $f$ je třídy $C^1$, a tedy spojitá, a vnitřní funkce ($t \mapsto b_1 + t(a_1 - b_1)$ a $t \mapsto b_2 + t(a_2 - b_2)$) jsou spojité.
  - Funkce $\varphi$ je třídy $C^1$ na intervalu $(0, 1)$. To plyne z Věty V.14. Ze vzorečku v této větě navíc plyne, že pro $t \in (0, 1)$ platí

    $$\begin{aligned}\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(b_1 + t(a_1 - b_1), b_2 + t(a_2 - b_2)) \cdot (a_1 - b_1) \\ + \frac{\partial f}{\partial y}(b_1 + t(a_1 - b_1), b_2 + t(a_2 - b_2)) \cdot (a_2 - b_2).\end{aligned}$$

    *Poznámka: Výraz $a_1 - b_1$ je derivací funkce $t \mapsto b_1 + t(a_1 - b_1)$. (Podobně pro $a_2 - b_2$.)*

– Funkce $\varphi$ tedy na intervalu $\langle 0,1\rangle$ splňuje předpoklady Lagrangeovy věty (Věta IV.33), a tedy podle této věty existuje $t_0 \in (0,1)$, pro které platí

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t_0) \cdot (1-0) = \varphi'(t_0).$$

– Pokud do tohoto vzorce dosadíme za $\varphi$ a použijeme výše uvedený vzorec pro $\varphi'$, dostaneme

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= \frac{\partial f}{\partial x}(b_1 + t_0(a_1 - b_1), b_2 + t_0(a_2 - b_2)) \cdot (a_1 - b_1) \\ &\qquad + \frac{\partial f}{\partial y}(b_1 + t_0(a_1 - b_1), b_2 + t_0(a_2 - b_2)) \cdot (a_2 - b_2) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(t_0 a + (1-t_0)b) \cdot (a_1 - b_1) \\ &\qquad + \frac{\partial f}{\partial y}((t_0 a + (1-t_0)b) \cdot (a_2 - b_2). \end{aligned}$$

To je přesně to, co jsme chtěli dokázat.

- Důkaz pro obecné $n$ je stejný, jen výraz na pravé straně má $n$ sčítanců.
- Význam této věty je podobný jako význam Lagrangeovy věty pro funkce jedné proměnné. Rozdíl oproti slabé Lagrangeově větě (Věta V.11) je v tom, že zde dostame jeden bod na úsečce $ab$, zatímco ve Větě V.11 dostaneme $n$ (různých) bodů v příslušném obdélníku.

**K definici konkávních, ryze konkávních, konvexních a ryze konvexních funkcí:**

- Konkávní funkce definujeme pouze na konvexní množině. Důvod je ten, že chceme, aby pro každou dvojici bodů $a, b \in M$ bylo $f(ta + (1-t)b)$ definováno.
- Definice konkávnosti je velmi podobná definici z oddílu IV.7. Pokud $n = 1$ a $M$ je interval, pak pojem konkávní funkce na množině $M$ splývá s pojmem konkávní funkce na intervalu z oddílu IV.7.
- $f$ je konkávní na $M$, právě když je konkávní na každé úsečce obsažené v $M$.

⇒: Tato implikace je snadná. Úsečka je konvexní množina. Dále, je-li $f$ konkávní na $M$, je jistě konkávní i na každé konvexní podmnožině $M$.

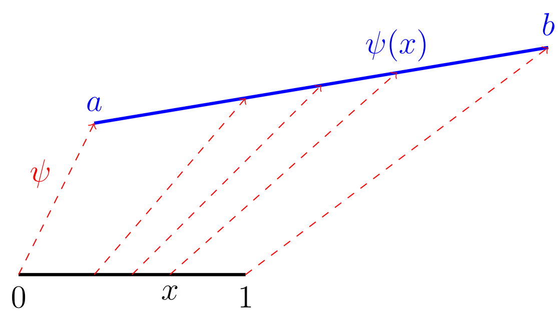
⇐: Předpokládejme, že $f$ je konkávní na každé úsečce obsažené v $M$. Dokažme, že je konkávní na $M$. Vezměme tedy $a, b \in M$ a $t \in [0,1]$. Díky tomu, že $f$ je konkávní na úsečce $ab$, platí

$$f(ta + (1-t)b) \geq tf(a) + (1-t)f(b).$$

A to je přesně to, co bylo třeba dokázat.

- $f$ je konkávní na úsečce $ab$, právě když funkce $\varphi(t) = f(ta + (1-t)b)$ je konkávní na intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

  *Návod k důkazu: Pokud $a \neq b$, pak zobrazení $\psi : \langle 0,1\rangle \to ab$ je prosté a na. Navíc splňuje $\psi(tx+(1-t)y) = t\psi(x)+(1-t)\psi(y)$ pro $x, y \in \langle 0,1\rangle$ a $t \in \langle 0,1\rangle$. Viz obrázek.*




  *Přitom platí $\varphi(t) = f(\psi(t))$ pro $t \in \langle 0,1\rangle$ a $f(x) = \varphi(\psi^{-1}(x))$ pro $x$ z úsečky $ab$.*

- Analogické ekvivalence platí pro ryze konkávní funkce, pokud uvažujeme skutečné (nedegenerované) úsečky.

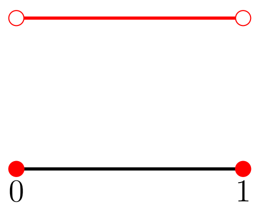
- Funkce $f$ je (ryze) konvexní na $M$, právě když $-f$ je (ryze) konkávní na $M$.

**K Větě V.21:**

- Důkaz dělat nebudeme. Není sice příliš těžký, ale tak trochu trikový.

- Předpoklad, že $G$ je otevřená je podstatný. Pokud $G$ není otevřená, nemusí být $f$ spojitá v hraničních bodech $G$ vzhledem ke $G$.

  Příklad: Funkce $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \text{ nebo } x = 1 \\ 1 & x \in (0,1) \end{cases}$ je konkávní na intervalu $\langle 0,1 \rangle$, ale není spojitá na $\langle 0,1 \rangle$. Její graf:




- *Návod k důkazu pro $n = 1$: Nechť $f$ je konkávní na otevřeném intervalu $(a,b)$. Pomocí Vět IV.37 a IV.9 ukažte, že $f$ má v každém bodě intervalu $(a,b)$ vlastní derivaci zprava i zleva. Z toho odvoďte, že je v každém bodě spojitá zprava i zleva, tedy spojitá.*

**K Větě V.22:**

Důkaz je snadný: Nechť $x, y \in Q_\alpha$ a $t \in \langle 0,1 \rangle$. Pak

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y) \geq t\alpha + (1-t)\alpha = \alpha.$$

První nerovnost plyne z toho, že $f$ je konkávní. Druhá z toho, že $x, y \in Q_\alpha$, a tedy $f(x) \geq \alpha$ a $f(y) \geq \alpha$.

Dokázaná nerovnost znamená, že $tx + (1-t)y \in Q_\alpha$, čímž je důkaz hotov.