Lemma XI.18 Nechť $n \geq 2$ a tvrzení Věty 15 platí pro $n-1$.
Nechť $a = (a', a_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$, $r, s, \varepsilon \in (0, \infty)$, $\varepsilon < r$.
Nechť f je odděleně holomorfní na $\mathbb{P}(a', \hat{r}) \times U(a_n, s)$, která je omezená na $\mathbb{P}(a', \hat{\varepsilon}) \times U(a_n, s)$.
Pak f je holomorfní na $\mathbb{P}(a', \hat{r}) \times U(a_n, s)$

$(\hat{r} = (r, \dots, r) \in (0, \infty)^{n-1})$.

Dk: • BÚNO $a = 0$

• $z_n \in U(0, s)$ pevné

Pak $z' \mapsto f(z', z_n)$ je odděleně holomorfní na $\mathbb{P}(0, \hat{r})$, dle indukčního předpokladu tedy holomorfní, lze vyjádřit mocninnou řadou

$$f(z', z_n) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{n-1}} c_\alpha(z_n) (z')^\alpha, \quad z' \in \mathbb{P}(0, \hat{r})$$

• f holomorfní na $\mathbb{P}(0, \hat{\varepsilon}) \times U(0, s)$, tedy $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^{n-1}$:

$$(z', z_n) \longmapsto \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial (z')^\alpha} f(z', z_n)$$

je holomorfní na $\mathbb{P}(0, \hat{\varepsilon}) \times U(0, s)$,
tedy

$$c_\alpha(z_n) = \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial (z')^\alpha} f(z', z_n) \Big|_{z' = 0}$$

je holomorfní na $U(0, s)$.

Tedy pokud $c_\alpha \not\equiv 0$, pak $u_\alpha(z_n) = \frac{1}{|\alpha|} \log |c_\alpha(z_n)|$

je subharmonická na $U(0, s)$.

Když $c_\alpha \not\equiv 0$ jen pro konečně mnoho α, je f zřejmě holomorfní na $\mathbb{P}(0, \hat{r}) \times U(0, s)$, nechť je tedy takových α nekonečně mnoho.

• zvolme $B>0$, že $|f| \le B$ na $\overline{P(0,\varepsilon)} \times U(0,s)$

Pak $|c_\alpha(z_n)| = \left| \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial (z')^\alpha} f(z', z_n) \Big|_{z'=0} \right| =$

$$= \left| \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{f(\varepsilon e^{it_1}, \dots, \varepsilon e^{it_{n-1}}, z_n)}{(\varepsilon e^{it_1})^{\alpha_1+1} \cdots (\varepsilon e^{it_1})^{\alpha_n+1}} \cdot \varepsilon^{n-1} e^{i(t_1+\dots+t_n)} \, dt_1 \dots dt_n \right|$$

$$\le \frac{B}{\varepsilon^{|\alpha|}}$$

$$\Rightarrow \log |c_\alpha(z_n)| \le \log B - |\alpha| \log \varepsilon$$

$$\Rightarrow \mu_\alpha(z_n) \le \frac{1}{|\alpha|} \log B - \log \varepsilon \le \log^+ B - \log \varepsilon$$

Tedy posloupnost (μ_n) je stejně omezená shora

• $0 < r_1 < r_2 < r$ libovolné

$$\forall z_n \in U(0,s): \ \sum |c_\alpha(z_n)| \, r_2^{|\alpha|} < \infty \Rightarrow |c_\alpha(z_n)| \, r_2^{|\alpha|} \xrightarrow{\alpha} 0$$

$$\Rightarrow \log |c_\alpha(z_n)| + |\alpha| \log r_2 \longrightarrow -\infty$$

od jistého α_0 (tj. až na konečně mnoho α) je

$$\log |c_\alpha(z_n)| + |\alpha| \log r_2 < 0$$

$$\Rightarrow \mu_\alpha(z_n) < -\log r_2$$

$$\Rightarrow \limsup_\alpha \mu_\alpha(z_n) \le -\log r_2 < -\log r_1$$

Lemma 17

$\Rightarrow$

$\forall\, s' \in (0, s)\ \exists\, d_0\ \forall d \geq d_0\ \ \forall z_n \in \overline{U(0, s')}$: $M_d(z_n) \leq -\lg r_1$

$$M_d(z_n) + \lg r_1 \leq 0$$

$$|C_\alpha(z_n)|\, r_1^{|\alpha|} \leq 1$$

$\Rightarrow \sum C_\alpha(z_n)(z')^\alpha$ konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{P}(0, r_1) \times U(0, s')$, tedy f (coby součet) je holomorfní na $\mathbb{P}(0, r_1) \times U(0, s')$

$r_1 \in (0, r)$, $s' \in (0, s)$ libovolné $\Rightarrow$ f holomorfní na $\mathbb{P}(0, r) \times U(0, s)$

Důkaz Věty XI.15 : f oddělené holomorfní $\Rightarrow f$ holomorfní

Indukce podle dimenze:

$n=1$ ... platí (dík Cauchyově větě a Cauchyovu vzorci)

Nechť $n \geq 2$ a platí to pro $n-1$

Stačí na polydisku $P(0, \hat{r})$: zvolme $s \in (0,r)$

$A_m = \{ z' \in P(0', \frac{\hat{r}}{2}) ; \forall z_n \in U(0,s) : |f(z', z_n)| \leq m \}$

Pak $\bigcup_m A_m = P(0', \frac{\hat{r}}{2})$

[$z' \in P(0', \frac{\hat{r}}{2})$ ... $z_n \mapsto f(z', z_n)$ je holomorfní na $U(0,r)$, tedy spojitá, tedy omezená na $\overline{U(0,s)}$]

Navíc jsou A_m uzavřené

[z_n pevné $\Rightarrow z' \mapsto f(z', z_n)$ je holomorfní dle ind. předp., tedy spojitá]

Baireova věta $\Rightarrow \exists m : \operatorname{Int} A_m \neq \emptyset$

$\exists a' \in P(0', \frac{\hat{r}}{2}) \ \exists \varepsilon > 0 : P(a', \hat{\varepsilon}') \subset P(0', \frac{\hat{r}}{2})$
a f je omezená na $P(a', \hat{\varepsilon}') \times U(0,s)$

$P(a', \widehat{\varepsilon + \frac{r}{2}}) \subset P(0', \hat{r}) \overset{L18}{\Rightarrow} f$ holomorfní na $P(a', \widehat{\varepsilon + \frac{r}{2}}) \times U(0,s)$

$P(a', \widehat{\varepsilon + \frac{r}{2}})$ obsahuje $P(0', \hat{\sigma})$ pro nějaké $\sigma > 0$

$\overset{L18}{\Rightarrow} f$ holomorfní na $P(0', \hat{r}) \times U(0,s)$. $s \in (0,r)$ lib.
$\Rightarrow f$ holom. na $P(0, \hat{r})$.