# KOMPLEXNÍ ANALÝZA 1

LS 2017/2018

ZÁPOČTOVÉ ÚLOHY – SADA 1

**Obecné poznámky:**

- Výpočty i všechna tvrzení je třeba přiměřeně a srozumitelně zdůvodnit. K tomu je možné používat zejména znalosti z Kapitoly VI z přednášky, jakož i znalosti z Úvodu do komplexní analýzy.
- Základním nástrojem pro řešení úloh 1–7 je Věta VI.21 z přednášky. Alespoň jeden podobný příklad bude spočten na cvičení.
- V úlohách 8–12 je úkolem vyjádřit danou funkci co nejjednodušseji jako součin celé funkce bez kořenů a nekonečného součinu, z něhož budou patrné kořeny. Podobná úloha pro funkci sinus bude spočtena na cvičení. Při řešení se hodí následující znalosti:
  - Vlastnosti nekonečných součinů z oddílu VI.3.
  - Weierstrassova věta o derivování limity holomorfních funkcí.
  - Metoda sčítání řad pomocí reziduové věty: Jsou-li $P, Q$ polynomy a stupeň $Q$ je alespoň o dva větší než stupeň $P$, pak platí

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ Q(n)\neq 0}}^{\infty} \tfrac{P(n)}{Q(n)} = -\sum_{a\in\mathbb{C}, Q(a)=0} \operatorname{res}_a \pi \operatorname{cotg} \pi z \cdot \tfrac{P(z)}{Q(z)}; \quad \sum_{\substack{n=-\infty \\ Q(n)\neq 0}}^{\infty} (-1)^n \tfrac{P(n)}{Q(n)} = -\sum_{a\in\mathbb{C}, Q(a)=0} \operatorname{res}_a \tfrac{\pi}{\sin \pi z} \cdot \tfrac{P(z)}{Q(z)}$$

  - Wallisova formule

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{4k^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} = \frac{\pi}{2}.$$

- Příklady je třeba rezervovat e-mailem. Rezervace bude potvrzena uvedením jména u příkladu. Bude-li příklad již obsazen, upozorním na to v e-mailové odpovědi. V e-mailu je možné napsat více příkladů v preferovaném pořadí. Rezervován bude první z dosud volných.
- Pokud se někomu zdá jeho úkol neřešitelný nebo má dojem, že v zadání je chyba, ať se ozve, já to pak prověřím.
- Řešení je třeba odevzdat rukou psané, nikoli tištěné.

**Úloha č. 1** [rezervoval(a): *L. H.*]
Rozložte funkci $\frac{1}{\sin^2 3z}$ na „parciální zlomky“. (Použijte Cauchyovu metodu, tj. Větu VI.21 z přednášky.)

**Úloha č. 2** [rezervoval(a): *M. Zi.*]
Rozložte funkci $\frac{\operatorname{cotg} z}{\sin z}$ na „parciální zlomky“. (Použijte Cauchyovu metodu, tj. Větu VI.21 z přednášky.)

**Úloha č. 3** [rezervoval(a): *M. S.*]
Rozložte funkci $\frac{z}{\sin^2 z}$ na „parciální zlomky“. (Použijte Cauchyovu metodu, tj. Větu VI.21 z přednášky.)

**Úloha č. 4** [rezervoval(a): *M. Ze.*]
Rozložte funkci $\frac{1}{\sin^3 z}$ na „parciální zlomky“. (Použijte Cauchyovu metodu, tj. Větu VI.21 z přednášky.)

**Úloha č. 5** [rezervoval(a): *zatím nikdo*]
Rozložte funkci $\operatorname{cotg}^2 2z$ na „parciální zlomky“. (Použijte Cauchyovu metodu, tj. Větu VI.21 z přednášky.)

**Úloha č. 6** [rezervoval(a): *zatím nikdo*]
Rozložte funkci $\frac{1}{\cos^2 \frac{z}{2}}$ na „parciální zlomky“. (Použijte Cauchyovu metodu, tj. Větu VI.21 z přednášky.)

**Úloha č. 7** [rezervoval(a): *zatím nikdo*]
Rozložte funkci $\operatorname{tg}^3 z$ na „parciální zlomky“. (Použijte Cauchyovu metodu, tj. Větu VI.21 z přednášky.)

**Úloha č. 8** [rezervoval(a): *R. Š.*]
Vyjádřete funkci $f(z) = e^z - 1$ jako „součin kořenových činitelů“ pomocí nekonečného součinu.

**Úloha č. 9** [rezervoval(a): *K. Š.*]
Vyjádřete funkci $f(z) = 1 - \sin z$ jako „součin kořenových činitelů“ pomocí nekonečného součinu.

**Úloha č. 10** [rezervoval(a): *zatím nikdo*]
Vyjádřete funkci $f(z) = 1 + 2\sin z$ jako „součin kořenových činitelů“ pomocí nekonečného součinu.

**Úloha č. 11** [rezervoval(a): *zatím nikdo*]
Vyjádřete funkci $f(z) = 1 - 2\cos z$ jako „součin kořenových činitelů“ pomocí nekonečného součinu.

**Úloha č. 12** [rezervoval(a): *O. L.*]
Vyjádřete funkci $f(z) = \sin z - \cos z$ jako „součin kořenových činitelů“ pomocí nekonečného součinu.