VII.2 Duál k $H(G)$

Definice. Nechť $M \subset \overline{\mathbb{C}}$ je libovolná množina. Symbolem $H(M)$ značíme množinu všech funkcí holomorfních na M (tj. holomorfních na nějaké otevřené množině obsahující M).

Věta 6 (Rieszova věta o reprezentaci). *Nechť K je kompaktní Hausdorffův prostor (například K je kompaktní podmnožina $\mathbb{C}$). Nechť $C(K)$ značí Banachův prostor všech spojitých komplexních funkcí na K opatřený supremovou normou. Nechť $L : C(K) \to \mathbb{C}$ je lineární funkcionál. Následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(1) *L je spojité.*
(2) *Existuje konečná nezáporná regulární borelovská míra μ na K a borelovská funkce $h : K \to \mathbb{C}$ splňující $|h(x)| = 1$ pro každé $x \in K$ tak, že $L(f) = \int_K fh \, \mathrm{d}\mu$ pro $f \in C(K)$.*
(3) *Existuje komplexní regulární borelovská míra ν na K, že $L(f) = \int_K f \, \mathrm{d}\nu$ pro $f \in C(K)$.*

Věta 7 (popis duálu k $H(G)$). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $L : H(G) \to \mathbb{C}$ je lineární zobrazení. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) *L je spojité.*
(2) *Existuje $K \subset G$ kompaktní a $C > 0$ takové, že pro každé $f \in H(G)$ je $|L(f)| \le C\varphi_K(f)$.*
(3) *Existuje $K \subset G$ kompaktní, konečná nezáporná regulární borelovská míra μ na K a borelovská funkce $h : K \to \mathbb{C}$ splňující $|h(x)| = 1$ pro každé $x \in K$ tak, že $L(f) = \int_K fh \, \mathrm{d}\mu$ pro $f \in H(G)$.*
(4) *Existuje taková $g \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus G)$, pro kterou $g(\infty) = 0$, a taková kompaktní množina $K \subset G$, že pro každý cykl Γ „v množině G okolo kompaktu K“ (tj. splňující podmínky z Věty V.1) platí $L(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma fg$ pro $f \in H(G)$.*

Poznámky.

(a) Množina K vyskytující se v bodě (2) a (3) se nazývá **nosič** funkcionálu L. Hodnota $L(f)$ závisí jen na hodnotách f na tomto K.
(b) Funkce g z bodu (4) splňuje vzorec

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(w)}{z - w} \, \mathrm{d}w$$

na nějaké otevřené množině obsahující $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$. Je tedy určena jednoznačně v tom smyslu, že pokud g_1, g_2 jsou dvě takové funkce, pak existuje otevřená množina $U \supset \overline{\mathbb{C}} \setminus G$, že $g_1 = g_2$ na U.