VI.3 Vsuvka o nekonečných součinech

Definice.

- **Nekonečným součinem** rozumíme symbol

(*) $$\prod_{n=1}^{\infty} a_n,$$

kde (a_n) je posloupnost komplexních čísel.

- **Hodnotou nekonečného součinu** (*) rozumíme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} a_k,$$

pokud tato limita existuje. Tuto hodnotu pak označujeme rovněž symbolem (*).

Poznámky:

(1) Hodnota nekonečného součinu nemusí být definována. Pokud je definována, může to být nula, konečné nenulové číslo nebo ∞. Pro součin reálných čísel lze také uvažovat hodnotu $+\infty$ nebo $-\infty$.

(2) Pokud je $a_n = 0$ alespoň pro jedno $n \in \mathbb{N}$, je hodnota nekonečného součinu nulová (bez ohledu na hodnoty ostatních členů posloupnosti).

(3) Hodnota součinu může být nulová i v případě, že všechny členy posloupnosti (a_n) jsou nenulové.

Větička 13 (nutná podmínka konvergence). *Nechť hodnota nekonečného součinu (*) je konečné nenulové číslo. Pak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Poznámky:

(1) Podmínka ve Větičce 13 je nutná, nikoli postačující. A to ani v případě, že všechny členy posloupnosti (a_n) jsou nenulové.

(2) Pokud je hodnota nekonečného součinu (*) nulová, $\lim\limits_{n} a_n$ nemusí existovat, posloupnost (a_n) nemusí být ani omezená (ani v případě, že obsahuje jen nenulové členy). Svědčí o tom například součin

$$\prod_{n=1}^{\infty} n^{-1+2\cdot(-1)^n} = 1 \cdot 2^1 \cdot 3^{-3} \cdot 4^1 \cdot 5^{-3} \cdot 6^1 \cdot 7^{-3} \cdots = 0.$$

Věta 14. *Nechť (a_n) je posloupnost komplexních čísel splňující*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - a_n| < \infty.$$

Pak platí:

(i) *Hodnota nekonečného součinu $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ je konečné číslo.*
(ii) *Pokud žádný z členů posloupnosti (a_n) není nulový, pak hodnota nekonečného součinu je nenulová.*
(iii) *Pro každou permutaci (n_j) přirozených čísel platí* $\prod_{j=1}^{\infty} a_{n_j} = \prod_{n=1}^{\infty} a_n$.

Důsledek 15. *Nechť A je neprázdná množina a (u_n) posloupnost omezených komplexních funkcí definovaných na A taková, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - u_n|$ konverguje stejnoměrně na množině A. Pro $n \in \mathbb{N}$ a $z \in A$ označme*

$$f_n(z) = \prod_{j=1}^{n} u_j(z).$$

Pak platí:

(a) *Funkce f_n konvergují stejnoměrně na A k nějaké funkci f.*
(b) *Pro každou permutaci (n_j) přirozených čísel platí*

$$f(z) = \prod_{j=1}^{\infty} u_{n_j}(z), \qquad z \in A.$$

(c) *Je-li $f(z_0) = 0$ pro nějaké $z_0 \in A$, pak existuje $n \in \mathbb{N}$, pro které $u_n(z_0) = 0$.*

Důsledek 16. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je neprázdná oblast a (u_n) je posloupnost holomorfních funkcí definovaných na Ω, z nichž žádná není konstatní nulová funkce. Předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - u_n(z)|$ konverguje lokálně stejnoměrně na Ω. Pak funkce*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} u_n(z), \quad z \in \Omega,$$

je holomorfní na Ω a není konstantně rovna nule. Navíc, pokud $z_0 \in \Omega$ je kořenem funkce f, pak množina

$$M = \{n \in \mathbb{N}; u_n(z_0) = 0\}$$

je neprázdná a konečná a pro násobnost kořenu z_0 platí (při značení z Věty 5)

$$N_f(z_0) = \sum_{n \in M} N_{u_n}(z_0).$$