VI.3 Meromorfní funkce

Definice. Nechť $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ je neprázdná otevřená množina.

(i) Symbolem $H(G)$ budeme značit množinu všech komplexních funkcí holomorfních na G.

(ii) Funkce $f : G \to \overline{\mathbb{C}}$ se nazývá **meromorfní**, jestliže je spojitá na G a existuje množina $M \subset G$, která je izolovaná v G (tj. nemá v G hromadný bod), taková, že f je holomorfní na $G \setminus M$.

(iii) Množinu všech funkcí meromorfních na G značíme $M(G)$.

Poznámka. V bodech výjimečné množiny M z definice má meromorfní funkce **nejvýše pól** (tj. buď pól nebo odstranitelnou singularitu).

Větička 4. *Nechť $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ je neprázdná otevřená množina a $f, g \in M(G)$.*

- *Existuje právě jedna $u \in M(G)$ taková, že rovnost $u(z) = f(z) + g(z)$ platí pro všechna $z \in G$ s výjimkou bodů nějaké množiny izolované v G.*
- *Existuje právě jedna $v \in M(G)$ taková, že rovnost $v(z) = f(z) \cdot g(z)$ platí pro všechna $z \in G$ s výjimkou bodů nějaké množiny izolované v G.*
- *Existuje právě jedna $w \in M(G)$ taková, že rovnost $w(z) = f'(z)$ platí pro všechna $z \in G$ s výjimkou bodů nějaké množiny izolované v G.*

Poznámka. Funkci u nazýváme **součtem** funkcí $f, g \in M(G)$ a píšeme $u = f + g$. Funkci v nazýváme **součinem** funkcí $f, g \in M(G)$ a píšeme $u = f \cdot g = fg$. Analogicky definujeme násobek meromorfní funkce komplexním číslem a rozdíl dvou meromorfních funkcí. Funkci w nazýváme **derivací** funkce $f \in M(G)$ a píšeme $w = f'$. Analogicky definujeme druhou derivaci i vyšší derivace.

Věta 5 (o jednoznačnosti). *Nechť $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ je oblast, $f, g \in M(G)$ jsou takové, že množina*

$$\{z \in G : f(z) = g(z)\}$$

není izolovaná v G. Pak $f = g$.

Větička 6. *Nechť $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ je neprázdná oblast a $f, g \in M(G)$, přičemž g není konstantní nulová funkce. Pak existuje právě jedna $w \in M(G)$ taková, že rovnost $w(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ platí pro všechna $z \in G$ s výjimkou bodů nějaké množiny izolované v G. Tuto funkci w nazýváme* **podílem** *funkcí f a g, píšeme $w = \frac{f}{g}$.*

Důsledek. *Je-li $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ neprázdná oblast, pak $M(G)$ s výše uvedenými operacemi sčítání a násobení je komutativní těleso.*

Větička 7. *Funkce meromorfní na $\overline{\mathbb{C}}$ je funkce racionální.*