VI.2 Globální Cauchyova věta

Lemma 1. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a f je funkce holomorfní na Ω. Pak funkce $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ definovaná předpisem*

$$g(z,w) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}, & z,w \in \Omega, z \neq w, \\ f'(z), & z,w \in \Omega, z = w, \end{cases}$$

je spojitá na $\Omega \times \Omega$.

Věta 2 (globální Cauchyova věta a Cauchyův vzorec). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, Γ cykl takový, že $\langle \Gamma \rangle \subset \Omega$ a pro každé $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ je $\operatorname{ind}_\Gamma a = 0$. Pak pro každou funkci f holomorfní na Ω platí*

$$\int_\Gamma f = 0$$

a

$$f(z) \cdot \operatorname{ind}_\Gamma z = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} \, \mathrm{d}w, \qquad z \in \Omega \setminus \langle \Gamma \rangle.$$

Poznámky:

(1) Je-li Γ cykl v Ω a platí $\int_\Gamma f = 0$ pro každou f holomorfní v Ω, pak $\operatorname{ind}_\Gamma a = 0$ pro každé $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

(2) Je-li $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ je souvislá, jsou předpoklady Věty 2 splněny pro každý cykl v Ω.

Věta 3 (obecná reziduová věta). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, Γ cykl takový, že $\langle \Gamma \rangle \subset \Omega$ a pro každé $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ je $\operatorname{ind}_\Gamma a = 0$. Nechť $M \subset \Omega$ je izolovaná v Ω, $M \cap \langle \Gamma \rangle = \emptyset$ a f je funkce holomorfní v $\Omega \setminus M$. Pak platí:*

$$\int_\Gamma f = 2\pi i \sum_{a \in M} \operatorname{ind}_\Gamma a \cdot \operatorname{res}_a f.$$

V sumě na pravé straně přitom je jen konečně mnoho nenulových sčítanců.