I. Banachovy algebry

I.1. Pojem Banachovy algebry s jednotkou a grupa invertibilních prvků.

Definice. **Banachovou algebrou** rozumíme komplexní algebru A, na níž je definovaná úplná norma splňující $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ pro všechna $x, y \in A$.

Poznámka. Pokud Banachova algebra A nemá jednotku, lze k ní jednotku přidat. Přesněji, pak existuje Banachova algebra B s jednotkou a její podalgebra kodimenze jedna, která je izometricky izomorfní s A (izomorfismus uvažujeme ve smyslu algeber, zachovává tedy i násobení). Dále budeme uvažovat pouze Banachovy algebry s jednotkou (nebude-li řečeno jinak).

Tvrzení 1 (další vlastnosti Banachových algeber). *Nechť $(A, \|\cdot\|)$ je Banachova algebra s jednotkou e. Pak platí*

- *$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.*
- *$A = \{0\}$, právě když $e = 0$.*
- *Jednotka je určena jednoznačně a $\|e\| \geq 1$, je-li A netriviální (různá od $\{0\}$).*
- *Je-li A netriviální, existuje ekvivalentní norma $\|\cdot\|_1$ na A tak, že $(A, \|\cdot\|_1)$ je Banachova algebra a $\|e\|_1 = 1$.*

Poznámka. Bez újmy na obecnosti dále předpokládáme, že A netriviální Banachova algebra s jednotkou e, pro kterou platí $\|e\| = 1$.

Definice. Nechť A je Banachova algebra.

- Prvek $x \in A$ se nazývá **invertibilní**, jestliže existuje $y \in A$ splňující $xy = yx = e$.
- Množinu všech invertibilních prvků A značíme $G(A)$.

Poznámka. Nechť A je Banachova algebra a $x \in A$. Pokud $y \in A$ splňuje $xy = e$, nazýváme jej **pravou inverzí** prvku x; splňuje-li $yx = e$, nazýváme jej **levou inverzí**. Prvek x může mít více různých pravých inverzí, stejně tak může mít více různých levých inverzí. Pokud však má pravou inverzi i levou inverzi, pak je invertibilní. Jeho inverzní prvek je jednoznačně určen a je zároveň jedinou pravou inverzí a jedinou levou inverzí.

Tvrzení 2 (o násobení invertibilních prvků). *Nechť A je Banachova algebra.*

- *$G(A)$ s operací násobení je grupa.*
- *Pokud $x_1, \dots, x_n$ komutují (po dvou), pak $x_1 \cdot \dots \cdot x_n \in G(A)$, právě když $\{x_1, \dots, x_n\} \subset G(A)$.*

Lemma 3 ("Neumannova geometrická řada"). *Nechť $(A, \|\cdot\|)$ je Banachova algebra s jednotkou e.*

- *Je-li $\|x\| < 1$ pro $x \in A$, platí $(e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (řada konverguje absolutně) a $\|(e - x)^{-1} - e\| \leq \frac{\|x\|}{1 - \|x\|}$.*
- *Je-li $x \in G(A)$, $h \in A$ a $\|h\| < \frac{1}{\|x^{-1}\|}$, je*

$$\|(x + h)^{-1} - x^{-1}\| \leq \frac{\|x^{-1}\|^2 \|h\|}{1 - \|x^{-1}\| \|h\|}.$$

Věta 4 (topologické vlastnosti grupy invertibilních prvků). *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou. Pak*

- *$G(A)$ je otevřená podmnožina A,*
- *zobrazení $x \mapsto x^{-1}$ je homeomorfismus $G(A)$ na sebe,*
- *je-li $x_n \in G(A) \to x \notin G(A)$, pak $\|x_n^{-1}\| \to \infty$.*

I.2. **Spektrum prvku algebry.**

Definice. Nechť A je Banachova algebra a $x \in A$.

- **Spektrem** prvku x rozumíme množinu
$$(\ \sigma_A(x) = \ ) \quad \sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \text{ není invertibilní v } A\}.$$
- **Rezolventní množinou** prvku x rozumíme množinu $\rho(x) = \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$.
- **Rezolventou** prvku x rozumíme funkci
$$R(\lambda, x) := (\lambda e - x)^{-1}, \qquad \lambda \in \rho(x).$$
- **Spektrálním poloměrem** prvku x rozumíme číslo $r(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$.

Tvrzení 5 (vlastnosti rezolventy)**.** *Nechť A je Banachova algebra a $a \in A$. Pak platí:*

(i) *$\rho(a)$ je otevřená;*
(ii) *$\lambda \mapsto R(\lambda, a)$ je spojitá na $\rho(a)$;*
(iii) *Pro $\lambda, \mu \in \rho(a)$ platí*
$$R(\mu, a) - R(\lambda, a) = -(\mu - \lambda) R(\mu, a) R(\lambda, a).$$
(iv) *Funkce $\lambda \mapsto \varphi(R(\lambda, a))$ je holomorfní na $\rho(a)$ pro každé $\varphi \in A^*$.*
(v) *Pro $|\lambda| > \|a\|$ platí $\lambda \in \rho(a)$ a*
$$R(\lambda, a) = \frac{1}{\lambda}\left(e - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}}.$$

Věta 6 (neprázdnost spektra)**.** *Nechť A je Banachova algebra. Pak pro každé $x \in A$ je $\sigma(x)$ neprázdná kompaktní množina.*

Poznámka. $\{a \in A : \sigma(a) \subset G\}$ je otevřená pro $G \subset \mathbb{C}$ otevřenou (tj. "$\sigma : A \to \mathcal{K}(\mathbb{C})$ je shora polospojité mnohoznačné zobrazení A do množiny neprázdných kompaktních podmnožin $\mathbb{C}$").

Věta 7 (Gelfand-Mazur)**.** *Nechť A je Banachova algebra. Pak A je těleso (tj. všechny nenulové prvky A jsou invertibilní, neboli $G(A) = A \setminus \{0\}$), právě když je A izometricky izomorfní Banachově algebře $\mathbb{C}$.*

Lemma 8 (o spektru a polynomu)**.** *Nechť A je Banachova algebra. Je-li $p(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \lambda^j$ polynom s komplexními koeficienty a $a \in A$, definujeme $p(a) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j a^j$. Pak platí:*

(a) *$p(a) \in G(A)$, právě když nulové body polynomu leží v $\rho(a)$.*
(b) *$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$.*

Věta 9 (o spektrálním poloměru)**.** *Nechť A je Banachova algebra a $a \in A$. Pak platí:*

- $r(a) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.
- *Vzorec z Tvrzení 5(v) platí i pro $|\lambda| > r(a)$, přičemž řada vpravo konverguje absolutně.*

Důsledek 10. *Je-li A Banachova algebra a $a \in A$ splňuje $r(a) < 1$, pak $(e - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$ (řada konverguje absolutně).*

Tvrzení 11. *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou e. Nechť B je uzavřená podalgebra A obsahující e a $x \in B$. Pak platí:*

- $\partial\sigma_B(x) \subset \sigma_A(x) \subset \sigma_B(x)$.
- *Nechť G je komponenta souvislosti $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(x)$. Pak buď $G \subset \sigma_B(x)$ nebo $G \cap \sigma_B(x) = \emptyset$.*
- *Je-li $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(x)$ souvislá množina, pak $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$.*

I.3. **Holomorfní kalkulus.**

Nechť A je Banachova algebra s jednotkou e, $x \in A$ a f buď funkce holomorfní na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$, která obsahuje $\sigma(x)$. Nechť Γ je "cyklus obíhající $\sigma(x)$ v Ω jedenkrát v kladném smyslu"(tj. Γ je cyklus v Ω, $\operatorname{ind}_\Gamma z$ nabývá jen hodnot 0 nebo 1, přičemž pro $z \in \sigma(x)$ je $\operatorname{ind}_\Gamma z = 1$ a pro $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ je $\operatorname{ind}_\Gamma z = 0$). Pak definujeme prvek $\tilde{f}(x) \in A$ vzorcem

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda e - x)^{-1} f(\lambda)\, d\lambda,$$

tj.

$$\varphi(\tilde{f}(x)) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi((\lambda e - x)^{-1}) f(\lambda)\, d\lambda, \qquad \varphi \in A^*.$$

Poznámka. Hodnota $\tilde{f}(x)$ nezávisí na volbě Γ.

Věta 12 (vlastnosti holomorfního kalkulu)**.** *Nechť A je Banachova algebra, $x \in A$ a $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina obsahující $\sigma(x)$.*

- *Zobrazení $f \mapsto \tilde{f}(x)$ je izomorfismus (komutativní) algebry s jednotkou $H(\Omega)$ na podalgebru algebry A.*
- *$\widetilde{id}(x) = x$ a $\tilde{1}(x) = e$, kde $id(\lambda) = \lambda$ a $1(\lambda) = 1$ pro $\lambda \in \Omega$.*
- *Je-li p polynom, pak $\tilde{p}(x) = p(x)$, kde $p(x)$ má význam jako v Lemmatu 8.*
- *Je-li $\lambda \in \Omega$, pak $\tilde{f}(\lambda e) = f(\lambda)e$.*
- *Pokud $f_n \to f$ lokálně stejnoměrně na Ω (kde $f_n \in H(\Omega)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$), pak $\tilde{f}_n(x) \to \tilde{f}(x)$ v A.*
- *$\tilde{f}(x) \in G(A)$, právě když $f(\lambda) \neq 0$ pro všechna $\lambda \in \sigma(x)$.*
- *$\sigma(\tilde{f}(x)) = f(\sigma(x))$.*
- *$\widetilde{(g \circ f)}(x) = \tilde{g}(\tilde{f}(x))$ pro $f \in H(\Omega)$, $g \in H(\Omega')$, $\Omega' \supset f(\sigma(x))$.*

I.4. **Ideály a komplexní homomorfismy.**

Definice.

- Nechť A, B jsou Banachovy algebry. Zobrazení $h : A \to B$ nazýváme **homomorfismem Banachových algeber** (krátce **homomorfismem**), pokud je lineární a navíc $h(xy) = h(x)h(y)$ pro $x, y \in A$.
- **Komplexním homomorfismem** na Banachově algebře A rozumíme homomorfismus $h : A \to \mathbb{C}$.
- Označme $\Delta(A)$ množinu všech nenulových komplexních homomorfismů na A.

Tvrzení 13 (vlastnosti komplexních homomorfismů)**.** *Nechť $h \in \Delta(A)$. Pak platí:*

(a) $h(e) = 1$.
(b) *Je-li $g \in G(A)$, je $h(g) \neq 0$.*
(c) *Je-li $a \in A$ a $\|a\| < 1$, je $|h(a)| < 1$. Speciálně, h je spojité a leží v uzavřené jednotkové sféře S_{A^*} duálního prostoru k Banachovu prostoru A.*

Poznámka. Platí věta (Gleason, Kahan, Zelazko), která říká, že komplexní lineární funkcionál na A s vlastnostmi (a) a (b) je multiplikativní.

Definice. Nechť A je Banachova algebra. **Ideálem** v A rozumíme vlastní vektorový podprostor $I \subset A$ takový, že kdykoli $x \in I$ a $y \in A$, platí $xy \in I$ a $yx \in I$. **Maximálním ideálem** v algebře A rozumíme ideál, který je maximální vzhledem k inkluzi.

Tvrzení 14 (vlastnosti ideálů a maximálních ideálů)**.**

- *Je-li I ideál v A, je $I \cap G(A) = \emptyset$.*
- *Uzávěr ideálu v A je též ideálem v A.*
- *Každý ideál I v A je obsažen v maximálním ideálu J.*
- *Maximální ideál je uzavřený.*

Tvrzení 15 (faktorizace algeber)**.** *Je-li A Banachova algebra (resp. komutativní Banachova algebra) s jednotkou a I je uzavřený ideál v A, pak Banachův kvocient A/I je Banachova algebra (resp. komutativní Banachova algebra) se součinem $q(x)q(y) = q(xy)$, kde q je kvocientové zobrazení Banachova prostoru A na Banachův prostor A/I, které je homomorfismem A na A/I.*

Tvrzení 16 (komplexní homomorfismy a maximální ideály)**.**

- *Je-li $h \in \Delta(A)$, je $h^{-1}(0)$ uzavřený lineární podprostor kodimenze jedna v A, který tvoří maximální ideál v A.*
- *Je-li I ideál v A kodimenze jedna, pak existuje jediné $h \in \Delta(A)$ s $h^{-1}(0) = I$.*

Tvrzení 17. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Označme M_n Banachovu algebru všech komplexních matic typu $n \times n$. Pak $\Delta(M_n) = \emptyset$ a jediný ideál v M_n je nulový ideál.*

Věta 18 (o existenci komplexních homomorfismů a spektru)**.** *Nechť A je komutativní Banachova algebra.*

(a) *Každý maximální ideál v A má kodimenzi jedna.*
(b) *Je-li I ideál v A, existuje $h \in \Delta(A)$, který je nulový na I.*
(c) *Je-li $x \in A$ a $\lambda \in \mathbb{C}$, pak $\lambda \in \sigma(x)$, právě když existuje $h \in \Delta(A)$ s $h(x) = \lambda$.*

Poznámka. Je-li A komutativní Banachova algebra, pak zobrazení $h \mapsto h^{-1}(0)$ je bijekce množiny $\Delta(A)$ na množinu všech maximálních vlastních ideálů.

Speciální případ tvrzení (c): $a \in G(A)$, právě když $h(a) \neq 0$ pro všechna $h \in \Delta(A)$.

I.5. Involuce a C^*-algebry.

Definice. Nechť A je Banachova algebra. **Involucí** na A rozumíme zobrazení $x \mapsto x^*$ algebry A do sebe takové, že pro všechna $x, y \in A$ a $\lambda \in \mathbb{C}$ platí:

$$(x+y)^* = x^* + y^*, \qquad (\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*, \qquad (xy)^* = y^* x^* \qquad \text{a} \qquad x^{**} = x.$$

Banachova algebra A s involucí se nazývá C^*-**algebra**, pokud pro každé $x \in A$ platí

$$\|x^* x\| = \|x\|^2.$$

Je-li A Banachova algebra s involucí a $x \in A$, pak prvek x se nazývá **samoadjungovaný** (neboli **hermiteovský**), pokud $x^* = x$; **normální**, pokud $x^* x = x x^*$.

Tvrzení 19. *Nechť A je Banachova algebra s involucí a $x \in A$. Pak platí:*

- $x + x^*$, $i(x - x^*)$, $x^* x$ *jsou samoadjungované.*
- *Existují jediné samoadjungované prvky $u, v \in A$ takové, že $x = u + iv$.*
- *Pokud $x = u + iv$, kde u, v jsou samoadjungované, pak x je normální, právě když $uv = vu$.*
- *Jednotka e je samoadjungovaná.*
- $x \in G(A)$, *právě když* $x^* \in G(A)$ *(pak $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$).*
- $\sigma(x^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(x)\}$.

Tvrzení 20. *Nechť A je C^*-algebra. Pak $\|x^*\| = \|x\|$ pro každé $x \in A$.*

Speciálně $\|x^* x\| = \|x x^*\| = \|x\|^2 = \|x^*\|^2$ pro každé $x \in A$ a $x \mapsto x^*$ je konjugovaně lineární izometrie A na A.

Důsledek 21. *Banachova algebra A s involucí je C^*-algebra, právě když $\|x^*\| = \|x\|$ a $\|x x^*\| = \|x\| \|x^*\|$ pro všechna $x \in A$.*

Věta 22 (o spektrálním poloměru a normě normálního prvku)**.** *Je-li A C^*-algebra a $a \in A$ je normální, pak $r(a) = \|a\|$.*

Definice. Nechť A a B jsou C^*-algebry a $h : B \to A$. Říkáme, že h je $*$-**homomorfismus**, je-li to homomorfismus Banachových algeber splňující navíc $h(x^*) = h(x)^*$ pro každé $x \in B$.

Tvrzení 23 (o automatické spojitosti $*$-homomorfismu)**.** *Nechť A a B jsou C^*-algebry a $h : B \to A$ je $*$-homomorfismus B do A. Pak $\|h\| \leq 1$.*

Tvrzení 24. *Nechť A je C^*-algebra. Pak pro $a \in A$ platí:*

(a) *Je-li a samoadjungovaný, pak $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.*
(b) *Je-li $a^* = a^{-1}$ (tj. a je* **unitární***), pak $\sigma(a) \subset \mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.*
(c) *Pro $h \in \Delta(A)$ a $a \in A$ platí $h(a^*) = \overline{h(a)}$ (h je $*$-homomorfismus, je-li to homomorfismus).*

I.6. **Gelfandova transformace.**

Lemma 25 (kompaktnost $\Delta(A)$)**.** *Nechť A je Banachova algebra. Pak $\Delta(A)$ je kompaktní ve w^* topologii prostoru A^*, tj. v topologii bodové konvergence na A.*

Definice. Nechť A je komutativní Banachova algebra.

- Pro $x \in A$ a $h \in \Delta(A)$ položme $\hat{x}(h) = h(x)$. Pak $\hat{x}$ je spojitá komplexní funkce na $\Delta(A)$, která se nazývá **Gelfandovou transformací prvku** x.
- **Gelfandovou transformací algebry** A rozumíme zobrazení $\Gamma : A \to C(\Delta(A))$ definované předpisem $\Gamma(x) = \hat{x}$, $x \in A$.

Poznámka.

- Γ je homomorfismus algebry A do algebry $C(\Delta(A))$ s jádrem
$$rad(A) := \bigcap \{I : I \text{ je maximální ideál v } A\}.$$
- $\Gamma(A)$ odděluje body $\Delta(A)$.
- Γ je izomorfismus algeber A a $\Gamma(A) = \hat{A}$, právě když $rad(A) = \{0\}$ ("A je polojednoduchá").
- Γ je topologický izomorfismus algeber A a $\Gamma(A)$, právě když $rad(A) = \{0\}$ a $\hat{A} = \Gamma(A)$ je uzavřená.

Tvrzení 26 (Gelfandova transformace a spektrum)**.** *Nechť A je komutativní Banachova algebra.*

- *Pro každé $x \in A$ platí $\hat{x}(\Delta(A)) = \sigma(x)$, speciálně $\|\hat{x}\| = r(x)$.*
- *Γ je homomorfismus a $\|\Gamma\| \leq 1$.*

Věta 27 (Gelfand-Naimark)**.** *Nechť A je komutativní C^*-algebra. Pak Γ je izometrický $*$-izomorfismus C^*-algebry A na C^*-algebru $C(\Delta(A))$ (mimo jiné tedy platí identita $\widehat{x^*} = \overline{\hat{x}}$ na A).*

Důsledek 28. *Nechť A a B jsou komutativní C^*-algebry. Pak A a B jsou $*$-izomorfní, právě když $\Delta(A)$ a $\Delta(B)$ jsou homeomorfní.*

Poznámka. Nechť A je komutativní Banachova algebra.

- Položme $s = \inf\limits_{x \in A \setminus \{0\}} \dfrac{\|\hat{x}\|_\infty}{x}$, $r = \inf\limits_{x \in A \setminus \{0\}} \dfrac{\|x^2\|}{\|x\|^2}$. Pak $s^2 \leq r \leq s$.
- Γ je topologický izomorfismus, právě když existuje $K < +\infty$ tak, že pro všechna $x \in A$ platí $\|x\|^2 \leq K\|x^2\|$.
- Γ je izometrie, právě když pro všechna $x \in A$ platí $\|x\|^2 = \|x^2\|$.

I.7. **Spojitý funkční kalkulus pro C^* algebry.**

Lemma 29. *Nechť A je C^* algebra s jednotkou e a $B \subset A$ C^*-podalgebra obsahující e. Pak pro každé $x \in B$ je $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$.*

Věta 30 (spojitý funkční kalkulus pro C^*-algebry)**.** *Nechť A je C^*-algebra s jednotkou e a $x \in A$ je normální prvek. Nechť B je uzavřená podalgebra algebry A generovaná množinou $\{e, x, x^*\}$. Pak platí:*

- *B je komutativní C^* algebra.*
- *Zobrazení $h : \varphi \mapsto \varphi(x)$ je homeomorfismus $\Delta(B)$ na $\sigma(x)$.*

Nechť $\Gamma : B \to C(\Delta(B))$ je Gelfandova transformace algebry B. Pro $f \in C(\sigma(x))$ označme

$$\tilde{f}(x) = \Gamma^{-1}(f \circ h).$$

Pak zobrazení $\Phi : f \mapsto \tilde{f}(x)$, které se nazývá **spojitý funkční kalkulus pro prvek** *x, má následující vlastnosti:*

- *Φ je izometrický $*$-izomorfismus C^*-algebry $C(\sigma(x))$ na B.*
- *$\tilde{id}(x) = x$.*
- *Je-li p polynom, pak $\tilde{p}(x) = p(x)$.*
- *$\sigma(\tilde{f}(x)) = f(\sigma(x))$ pro $f \in C(\sigma(x))$.*
- *Jestliže $y \in A$ komutuje s x, pak y komutuje s $\tilde{f}(x)$ pro každé $f \in C(\sigma(x))$.*

Navíc, Φ je jediné zobrazení splňující první dvě podmínky.

II. Neomezené operátory na Hilbertových prostorech

II.1. Pojem neomezeného operátoru mezi Banachovými prostory.

Nechť X a Y jsou komplexní Banachovy prostory.

- **Operátorem z** X **do** Y rozumíme lineární zobrazení $T : D(T) \to Y$, kde $D(T)$ (**definiční obor** operátoru T) je vektorový podprostor prostoru X.
- Obor hodnot operátoru T, tj. množinu $T(X)$, značíme $R(T)$.
- Operátor T z X do Y nazveme **hustě definovaný**, pokud jeho definiční obor $D(T)$ je hustý v X.
- **Grafem operátoru** T rozumíme množinu
$$G(T) = \{(x, y) \in X \times Y : x \in D(T) \;\&\; Tx = y\}.$$
- Operátor T se nazývá **uzavřený**, pokud jeho graf $G(T)$ je uzavřená množina v $X \times Y$, tj. pokud pro každou posloupnost (x_n) v $D(T)$, pro kterou platí
  - $x_n \to x$ pro nějaké $x \in X$,
  - $Tx_n \to y$ pro nějaké $y \in Y$;

  platí $x \in D(T)$ a $Tx = y$.
- Nechť S a T jsou operátory z X do Y. Píšeme $S \subset T$, pokud $G(S) \subset G(T)$; tj. pokud $D(S) \subset D(T)$ a pro každé $x \in D(S)$ platí $Tx = Sx$. Operátor T se pak nazývá **rozšířením** operátoru S.
- Nechť S a T jsou operátory z X do Y. Jejich **součtem** rozumíme operátor $S + T$ s definičním oborem $D(S + T) = D(S) \cap D(T)$ definovaný vzorcem $(S + T)x = Sx + Tx$ pro $x \in D(T + S)$.
- Nechť T je operátor z X do Y a $\alpha \in \mathbb{C}$. Pokud $\alpha = 0$, pak operátorem αT rozumíme nulový operátor definovaný na X, pokud $\alpha \neq 0$, pak operátorem αT rozumíme operátor definovaný vzorcem $(\alpha T)x = \alpha \cdot Tx$ na $D(\alpha T) = D(T)$.
- Nechť T je operátor z X do Y a S je operátor z Y do Banachova prostoru Z, pak jejich složením rozumíme operátor ST s definičním oborem
$$D(ST) = \{x \in D(T) : Tx \in D(S)\}$$
definovaný vzorcem $(ST)(x) = S(T(x))$ pro $x \in D(ST)$.
- Je-li T prostý operátor z X do Y, **inverzním operátorem k** T rozumíme operátor T^{-1} z Y do X, jehož definičním oborem je $D(T^{-1}) = R(T)$ a který je inverzním zobrazením k T.

Lemma 1 (o grafu operátoru)**.** *Podmnožina $L \subset X \times Y$ je grafem nějakého operátoru, právě když je to lineární podprostor splňující*
$$\{(x, y) \in L : x = 0\} = \{(0, 0)\}.$$

Tvrzení 2. *Pro operátory R, S, T mezi Banachovými prostory (pro které mají uvedené operace smysl), platí:*

- *$(R + S) + T = R + (S + T)$;*
- *$(RS)T = R(ST)$;*
- *$(R + S)T = RT + ST$ a $T(R + S) \supset TR + TS$.*

Tvrzení 3 (o uzavřených operátorech)**.** *Nechť T je operátor z X do Y.*

- *Je-li T uzavřený a $D(T) = X$, pak $T \in L(X, Y)$.*
- *T má uzavřené rozšíření, právě když $(x_n, Tx_n) \to (0, y)$ v $D(T) \times Y$ implikuje $y = 0$.*
- *Je-li T uzavřený a prostý, pak T^{-1} je také uzavřený.*

Tvrzení 4 (o inverzi k uzavřenému operátoru)**.** *Nechť T je prostý uzavřený operátor z X do Y. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $R(T) = Y$ *a* $T^{-1} \in L(Y, X)$.
(ii) $R(T) = Y$.
(iii) $R(T)$ *je hustý v* Y *a* T^{-1} *je spojitý na* $R(T)$.

Poznámka. Pro neuzavřené operátory podmínky z předchozího tvrzení nejsou ekvivalentní. Podrobněji: Je-li T operátor z X do Y, který není uzavřený, pak:

- Podmínka (i) platit nemůže.
- Podmínka (ii) platit může. Pokud platí, pak neplatí ani (i) ani (iii). V tom případě T může a nemusí mít uzavřené rozšíření. Pokud má uzavřené rozšíření, pak operátor $\overline{T}$ není prostý.
- Podmínka (iii) platit může. Pokud platí, pak neplatí ani (i) ani (ii). V tom případě T může a nemusí mít uzavřené rozšíření. Pokud má uzavřené rozšíření, pak operátor $\overline{T}$ splňuje ekvivalentní podmínky z předchozího tvrzení.

Lemma 5. *Je-li S uzavřený a $T \in L(X, Y)$, pak $S + T$ je uzavřený.*

II.2. **Rezolventní množina, rezolventa a spektrum.**

Nechť X je Banachův prostor. **Operátorem na** X budeme rozumět operátor z X do X. Nechť T je operátor na X.

- **Rezolventní množinou** operátoru T rozumíme množinu všech $\lambda \in \mathbb{C}$, pro které operátor $\lambda I - T$ je prostý, na a $(\lambda I - T)^{-1} \in L(X)$. Značíme ji $\rho(T)$.
- **Rezolventou** (nebo **rezolventní funkcí**) operátoru T rozumíme zobrazení
$$\lambda \mapsto R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}, \qquad \lambda \in \rho(T).$$
- **Spektrem** operátoru T rozumíme množinu $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$.

Poznámka. (1) Pokud T není uzavřený, pak $\rho(T) = \emptyset$ a $\sigma(T) = \mathbb{C}$.

(2) Rezolventní množina se někdy definuje jiným způsobem. Někdy se požaduje
  (a) jen aby operátor $\lambda I - T$ byl prostý a na;
  někdy se požaduje,
  (b) aby operátor $\lambda I - A$ byl prostý, aby měl hustý obor hodnot a inverzní operátor aby byl spojitý.

  Je-li T uzavřený, pak všechny tři definice jsou ekvivalentní; pro neuzavřené operátory dávají různé pojmy. Pokud operátor T není uzavřený, ale má uzavřené rozšíření, pak jeho rezolvetní množina podle možnosti (b) se rovná rezolventní množině operátoru $\overline{T}$; rezolventní množina podle možnosti (a) je s rezolventní množinou $\overline{T}$ disjunktní.

Tvrzení 6 (uzavřenost spektra)**.** *Je-li T operátor na X, pak $\sigma(T)$ je uzavřené.*

Lemma 7 (prázdné spektrum a T^{-1})**.** *Je-li T uzavřený operátor na X, pro který platí $\sigma(T) = \emptyset$, pak $T^{-1} \in L(X)$ a $\sigma(T^{-1}) = \{0\}$.*

II.3. **Adjungovaný operátor, symetrické a samoadjungované operátory.**

Dále budeme uvažovat pouze operátory na Hilbertově prostoru H.
Skalární součin prvků $x, y \in H$ značíme $\langle x, y \rangle$.

Poznámka: Je-li H Hilbertův prostor, pak $H \times H$ je také Hilbertův prostor, pokud skalární součin definujeme vzorcem

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle, \qquad (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in H \times H.$$

Definice. Nechť T je hustě definovaný operátor na H.

- Symbolem $D(T^*)$ označme množinu všech $y \in H$, pro které je zobrazení
$$x \mapsto \langle Tx, y \rangle$$
spojité na $D(T)$.
- Pro $y \in D(T^*)$ označme symbolem T^*y jediný prvek H, který splňuje rovnost
$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \text{ pro všechna } x \in D(T).$$

Lemma 8. *Nechť T je hustě definovaný operátor na H. Pak $D(T^*)$ je lineární podprostor H a T^* je operátor na H s definičním oborm $D(T^*)$.*

Operátor T^* se nazývá **adjungovaný operátor k** T.

Tvrzení 9.

- *Je-li S hustě definovaný a $S \subset T$, pak $T^* \subset S^*$.*
- *Je-li $S+T$ hustě definovaný, platí $S^* + T^* \subset (S+T)^*$. Je-li navíc $S \in L(H)$, platí $S^* + T^* = (S+T)^*$.*
- *Jsou-li S a ST hustě definované, platí $T^*S^* \subset (ST)^*$. Je-li navíc $S \in L(H)$, platí $T^*S^* = (ST)^*$.*
- *Nechť T je hustě definovaný, prostý a $R(T)$ nechť je hustý. Pak $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.*

Tvrzení 10 (o jádru a obrazu)**.** *Pro hustě definovaný operátor T platí* $\operatorname{Ker}(T^*) = R(T)^{\perp}$.

Lemma 11 (o transformaci grafu)**.** *Definujeme $V : H \times H \to H \times H$ předpisem $V(x, y) = (-y, x)$. Pak*

- *V je unitární operátor na $H \times H$,*
- *$G(T^*) = (V(G(T)))^{\perp} = V(G(T)^{\perp})$ pro hustě definovaný operátor T na H,*

Tvrzení 12 (adjungovaný operátor a uzavřenost)**.** *Nechť T je hustě definovaný. Pak platí:*

- *Operátor T^* je uzavřený.*
- *T má uzavřené rozšíření, právě když T^* je hustě definovaný (pak $\overline{T} = T^{**}$).*
- *T je uzavřený, právě když $T = T^{**}$ (implicitně T^* je hustě definovaný).*

Definice. Nechť T je hustě definovaný operátor na H.

- Řekneme, že T je **symetrický**, pokud $T \subset T^*$, tj. pokud pro každé $x, y \in D(T)$ platí $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$.
- Řekneme, že T je **samoadjungovaný**, pokud $T = T^*$.

Lemma 13. *Nechť T je hustě definovaný samoadjungovaný operátor. Pak T je maximální symetrický (tj. neexistuje vlastní symetrické rozšíření T).*

Maximální symetrický operátor nemusí být samoadjungovaný.

Tvrzení 14 (další vlastnosti symetrických operátorů). *Nechť T je symetrický hustě definovaný oprátor na H. Pak platí:*

(a) *$\overline{T}$ je symetrický.*
(b) *Je-li navíc $D(T) = H$, pak T je omezený a samoadjungovaný.*
(c) *Je-li $R(T)$ hustý, pak T prostý.*
(d) *Je-li $R(T) = H$, pak T je samoadjungovaný prostý a $T^{-1} \in L(H)$.*
(e) *Je-li T samoadjungovaný a prostý, pak T^{-1} je samoadjungovaný (speciálně hustě definovaný).*

Lemma 15 (o $(\alpha + i\beta)I - S$). *Nechť S je symetrický na H a $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Pak $zI - S$ je prostý a jeho inverze je spojitá na $R(zI - S)$. Navíc, S je uzavřený, právě když $R(zI - S)$ je uzavřený.*

Věta 16 (spektrum samoadjungovaného operátoru). *Pro každý samoadjungovaný operátor platí $\emptyset \neq \sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

Důsledek 17 (charakterizace samoadjungovanosti mezi symetrickými operátory). *Pro operátor T na H je ekvivalentní:*

(a) *T je samoadjungovaný;*
(b) *T je symetrický a $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$;*
(c) *T je symetrický a existuje $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ s $z, \overline{z} \in \rho(T)$.*

II.4. **Symetrické operátory a Cayleyova transformace.**

Nechť S je symetrický operátor na H, tj. Označme symbolem C_S operátor

$$C_S = (S - iI)(S + iI)^{-1}.$$

Pak C_S je operátor na H, který se nazývá **Cayleova transformace operátoru** S.

Věta 18 (vlastnosti C_S)**.** *Nechť S je symetrický a $U = C_S$ je jeho Cayleyova transformace. Pak*

(a) *U je lineární izometrie $D(U) = R(S + iI)$ na $R(U) = R(S - iI)$.*
(b) *$I - U = 2i(S + iI)^{-1}$; speciálně, operátor $I - U$ je prostý a $R(I - U) = D(S)$.*
(c) *$S = i(I + U)(I - U)^{-1}$.*
(d) *U je uzavřený $\Leftrightarrow$ S je uzavřený $\Leftrightarrow$ $D(U)$ je uzavřený $\Leftrightarrow$ $R(U)$ je uzavřený.*

Lemma 19 (o izometrickém operátoru)**.** *Nechť U je libovolný operátor na H, který je izometrií $D(U)$ na $R(U)$. Pak*

(a) *$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ pro všechna $x, y \in D(U)$. Speciálně: U je unitární, právě když je $D(U) = R(U) = H$.*
(b) *Je-li $R(I - U)$ hustý v H, je $I - U$ prostý.*

Věta 20 (charakterizace obrazu Cayleyovy transformace)**.** *Nechť U je operátor na H, který je izometrií $D(U)$ na $R(U)$. Předpokládejme, že $I-U$ je prostý a $R(I-U)$ je hustý. Pak operátor $S = i(I + U)(I - U)^{-1}$ je symetrický a platí $C_S = U$.*

Poznámky

(1) Ve Větě 20 lze vynechat předpoklad, že $I - U$ je prostý, protože plyne z ostatních předpokladů (díky Lemmatu 19(b)).
(2) Věty 18 a 20 lze formulovat i pro operátory, které nejsou hustě definované. Pokud za symetrický operátor prohlásíme operátor S, který splňuje $\langle Sx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$ pro všechna $x, y \in D(S)$, pak Věta 18 platí beze změny a Věta 20 platí, i pokud vynecháme předpoklad hustoty $R(I - U)$.

Věta 21 (Cayleova transformace pro samoadjungované operátory)**.**

- *Nechť S je symetrický operátor na H. Pak S je samoadjungovaný, právě když C_S je unitární operátor.*
- *Nechť U je unitární operátor na H, pro který je $I - U$ prostý. Pak operátor $S = i(I + U)(I - U)^{-1}$ je samoadjungovaný a platí $C_S = U$.*

Poznámky.

(1) Nechť S a T jsou symetrické operátory na H. Pak $S \subset T$, právě když $C_S \subset C_T$.
(2) Nechť S je uzavřený symetrický operátor na H. Pak kodimenze podprostorů $D(C_S)$ a $R(C_S)$ nazýváme **indexy defektu** operátoru T. Pak platí:
   - T je samoadjungovaný, právě když oba indexy defektu jsou nulové.
   - T je maximální symetrický operátor, právě když aspoň jeden z indexů defektu je nulový.
   - T má samoadjungované rozšíření, právě když oba indexy defektu jsou stejné.

II.5. **Měřitelný kalkulus a spektrální míry.**

Nechť $T \in L(H)$ je normální operátor. Nechť

$$f \mapsto \tilde{f}(T), \quad f \in C(\sigma(T)),$$

označuje spojitý funkční kalkulus (podle oddílu I.7). Pro každou dvojici $x, y \in H$ nechť $E_{x,y}$ je komplexní Radonova míra na $\sigma(T)$ taková, že platí

$$\langle \tilde{f}(T)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} f \, \mathrm{d}E_{x,y}, \quad f \in C(\sigma(T)).$$

Pak platí:

- $\|E_{x,y}\| \le \|x\| \cdot \|y\|$ pro $x, y \in H$,
- $E_{x,x} \ge 0$ pro každé $x \in H$,
- zobrazení $(x, y) \mapsto E_{x,y}$ je seskvilineární.

Označme $\mathcal{A}_T$ σ-algebru podmnožin $\sigma(T)$, které jsou $E_{x,y}$-měřitelné pro všechna $x, y \in H$. Je-li nyní $h : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ omezená $\mathcal{A}_T$-měřitelná funkce, pak symbolem $\tilde{h}(T)$ značíme jediný prvek $L(H)$ splňující

$$\langle \tilde{h}(T)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} h \, \mathrm{d}E_{x,y}.$$

Zobrazení $h \mapsto \tilde{h}(T)$ se nazývá **měřitelný kalkulus** operátoru T. Pro $A \in \mathcal{A}_T$ označme

$$E(A) = \widetilde{\chi_A}(T).$$

Pak $E(A)$ je ortogonální projekce. Zobrazení $A \mapsto E(A)$ se nazývá **spektrální míra** operátoru T.

Definice. **Abstraktní spektrální mírou** v Hilbertově prostoru H rozumíme zobrazení E s následujícími vlastnostmi:

(i) Definičním oborem E je nějaká σ-algebra $\mathcal{A}$ podmnožin $\mathbb{C}$, která obsahuje všechny borelovské množiny.
(ii) Pro každé $A \in \mathcal{A}$ je $E(A)$ ortogonální projekce na H.
(iii) $E(\emptyset) = 0$, $E(\mathbb{C}) = I$.
(iv) Je-li $A \in \mathcal{A}$ takové, že $E(A) = 0$, pak pro každou $B \subset A$ platí $B \in \mathcal{A}$ (a $E(B) = 0$).
(v) $E(A \cap B) = E(A)E(B)$ pro $A, B \in \mathcal{A}$
(vi) $E(A \cup B) = E(A) + E(B)$ pro $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \emptyset$.
(vii) Pro každou dvojici $x, y \in H$ je zobrazení $E_{x,y} : A \mapsto \langle E(A)x, y\rangle$ komplexní borelovská míra na $\mathbb{C}$.

Poznámka.

- V bodě (vii) stačí předpokládat, že přo každé $x \in H$ je $E_x = E_{x,x}$ borelovská míra na $\mathbb{C}$.
- **Borelovskou mírou** výše rozumíme míru μ definovanou na σ-algebře $\mathcal{A}$ obsahující borelovské množiny takovou, že pro každou $A \in \mathcal{A}$ existují borelovské množiny B a C, pro které platí $B \subset A \subset C$ a $|\mu|(C \setminus B) = 0$.
- Spektrální míra omezeného normálního operátoru je abstraktní spektrální míra.

Tvrzení 22. *Nechť E je abstraktní spektrální míra v separabilním Hilbertově prostoru H. Pak pro každou $A \in \mathcal{A}$ existují borelovské množiny B a C, pro které platí $B \subset A \subset C$ a $E(C \setminus A) = 0$.*

Poznámka. Někdy se spektrální míra definuje jen pro separabilní prostory H. Pak se definuje jen na σ-algebře borelovských množin a vynechává se podmínka (iv). Pro neseparabilní H je třeba použít uvedenou definici.

Tvrzení 23 (integrál omezené funkce dle spektrální míry)**.** *Je-li E abstraktní spektrální míra v H definovaná na σ-algebře $\mathcal{A}$ a $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je omezená $\mathcal{A}$-měřitelná funkce, pak existuje právě jeden operátor $\Phi_0(f) \in L(H)$, pro který platí*

$$\langle \Phi_0(f)x, y\rangle = \int f \, \mathrm{d}E_{x,y} \qquad x, y \in H.$$

Dále platí:

(a) $\|\Phi_0(f)x\| = \sqrt{\int |f|^2 \, \mathrm{d}E_x}$ *pro* $x \in H$,

(b) $\|\Phi_0(f)\| = \text{ess sup}\,|f|$,

(c) Φ_0 *je* $*$*-homomorfismus* C^* *alebry omezených* $\mathcal{A}$*-měřitelných funkcí do* $L(H)$.

Značení: Operátor $\Phi_0(f)$ z předchozího tvrzení značíme $\int f \, \mathrm{d}E$ a nazýváme **integrálem funkce f podle spektrální míry E.**

Tvrzení 24 (spektrální rozklad omezeného normálního operátoru)**.** *Nechť* $T \in L(H)$ *je normální operátor. Pak existuje právě jedna abstraktní spektrální míra* E *v* H, *která splňuje*

$$T = \int \mathrm{id} \, \mathrm{d}E,$$

a to spektrální míra operátoru T. *Navíc platí pro každou* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *omezenou* $\mathcal{A}_T$*-měřitelnou*

$$\tilde{f}(T) = \int f \, \mathrm{d}E.$$

Tvrzení 25 (integrál (obecně neomezené) funkce dle spektrální míry)**.** *Nechť* E *je abstraktní spektrální míra v* H *definovaná na* σ*-algebře* $\mathcal{A}$, *a* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *nechť je* $\mathcal{A}$*-měřítelná funkce. Označme*

$$D(\Phi(f)) = \{x \in H : \int |f|^2 \, dE_x < \infty\}.$$

Pak $D(\Phi(f))$ *je hustý lineární podprostor* H. *Navíc existuje jediný operátor* $\Phi(f)$ *na* H *s definičním oborem* $D(\Phi(f))$, *který splňuje*

$$\langle \Phi(f)x, y \rangle = \int f \, \mathrm{d}E_{x,y}, \qquad x, y \in D(\Phi(f)).$$

Navíc platí:

$$\|\Phi(f)x\| = \sqrt{\int |f|^2 \, dE_x}, \qquad x \in D(\Phi(f)).$$

Značení: Operátor $\Phi(f)$ z předchozího tvrzení značíme $\int f \, \mathrm{d}E$ a nazýváme **integrálem funkce f podle spektrální míry E.**

Tvrzení 26 (vlastnosti $\int f \, dE$)**.** *Je-li* E *abstraktní spektrální míra v* H *a* f, g *jsou* $\mathcal{A}$*-měřitelné funkce, pak platí:*

(a) $\Phi(f) + \Phi(g) \subset \Phi(f + g)$;

(b) $\Phi(f)\Phi(g) \subset \Phi(fg)$ *a* $D(\Phi(f)\Phi(g)) = D(\Phi(g)) \cap D(\Phi(fg))$.

(c) $\Phi(f)^* = \Phi(\overline{f})$ *a* $\Phi(f)\Phi(f)^* = \Phi(|f|^2) = \Phi(f)^*\Phi(f)$, *speciálně* $\Phi(f)$ *je normální.*

(d) $\Phi(f)$ *je uzavřený operátor.*

(e) $\Phi(f)$ *je spojitý, právě když* f *je esenciálně omezená, tj. existuje* $A \in \mathcal{A}$, *že* $E(\mathbb{C} \setminus A) = 0$ *a* f *je omezená na* A.

Tvrzení 27 (spektrum $\int f \, dE$)**.** *Je-li* E *abstraktní spektrální míra a* f $\mathcal{A}$*-měřitelná funkce, pak*

$$\sigma(\int f \, dE) = W_E(f) := \mathbb{C} \setminus \bigcup \{G \subset \mathbb{C} : G \text{ otevřená }, E(f^{-1}(G)) = 0\}.$$

II.6. **Spektrální rozklad samoadjungovaného operátoru.**

Lemma 28. *Nechť T je samoadjungovaný operátor na H. Nechť E je spektrální míra operátoru C_T. Pak*

$$T = \int i\frac{1+z}{1-z}\,\mathrm{d}E(z).$$

Lemma 29 (o obrazu spektrální míry)**.** *Nechť F je abstraktní spektrální míra v H definovaná na σ-algebře $\mathcal{A}$ a $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je borelovsky měřitelné zobrazení. Označme*

$$\mathcal{A}' = \{A \subset \mathbb{C} : \varphi^{-1}(A) \in \mathcal{A}\}$$

a pro $A \in \mathcal{A}'$ položme

$$E(A) = F(\varphi^{-1}(A)).$$

Pak E je abstraktní spektrální míra v H a pro každou $\mathcal{A}'$-měřitelnou funkci f platí

$$\int f\,\mathrm{d}E = \int f \circ \varphi\,\mathrm{d}F.$$

Věta 30 (spektrální rozklad samoadjungovaného operátoru)**.** *Je-li S samoadjungovaný operátor na Hilbertově prostoru H, pak existuje jediná abstraktní spektrální míra E v H taková, že $S = \int \mathrm{id}\,\mathrm{d}E$.*

Důsledek 31. *Nechť S je samoadjungovaný operátor na H. Pak S je omezený, právě když $\sigma(S)$ je omezená množina.*

II.7. **Normální operátory.**

Definice. Hustě definovaný uzavřený operátor T na Hilbertově prostoru se nazývá **normální**, jestliže $T^*T = TT^*$.

Lemma 32 (o T^*T)**.** * *Nechť T je uzavřený a hustě definovaný operátor na H. Pak platí:*

(i) *$I + T^*T$ je bijekce $D(T^*T)$ na H.*
(ii) *Označme B inverzní operátor k $I + T^*T$ a $C = TB$. Pak B a C patří do $L(H)$ a mají normu nejvýš jedna. Navíc, B je nezáporný.*
(iii) *T^*T je samoadjungovaný a T je uzávěrem $T|_{D(T^*T)}$.*

Lemma 33. *Nechť T je normální operátor na H. Pak platí:*

(a) *$D(T) = D(T^*)$*
(b) *Pro $x \in D(T)$ platí $\|Tx\| = \|T^*x\|$.*
(c) *Je-li $S \supset T$ normální, pak $S = T$.*

Věta 34. *Je-li T normální operátor na H, pak existuje právě jedna abstraktní spektrální míra E v H, že $T = \int \mathrm{id}\, \mathrm{d}E$.*