II.3. **Adjungovaný operátor, symetrické a samoadjungované operátory.**

Dále budeme uvažovat pouze operátory na Hilbertově prostoru H.
Skalární součin prvků $x, y \in H$ značíme $\langle x, y\rangle$.

Poznámka: Je-li H Hilbertův prostor, pak $H \times H$ je také Hilbertův prostor, pokud skalární součin definujeme vzorcem

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle, \qquad (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in H \times H.$$

Definice. Nechť T je hustě definovaný operátor na H.

- Symbolem $D(T^*)$ označme množinu všech $y \in H$, pro které je zobrazení
$$x \mapsto \langle Tx, y\rangle$$
spojité na $D(T)$.
- Pro $y \in D(T^*)$ označme symbolem T^*y jediný prvek H, který splňuje rovnost
$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \text{ pro všechna } x \in D(T).$$

Lemma 8. *Nechť T je hustě definovaný operátor na H. Pak $D(T^*)$ je lineární podprostor H a T^* je operátor na H s definičním oborm $D(T^*)$.*

Operátor T^* se nazývá **adjungovaný operátor k** T.

Tvrzení 9.

- *Je-li S hustě definovaný a $S \subset T$, pak $T^* \subset S^*$.*
- *Je-li $S+T$ hustě definovaný, platí $S^* + T^* \subset (S+T)^*$. Je-li navíc $S \in L(H)$, platí $S^* + T^* = (S+T)^*$.*
- *Jsou-li S a ST hustě definované, platí $T^*S^* \subset (ST)^*$. Je-li navíc $S \in L(H)$, platí $T^*S^* = (ST)^*$.*
- *Nechť T je hustě definovaný, prostý a $R(T)$ nechť je hustý. Pak $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.*

Tvrzení 10 (o jádru a obrazu)**.** *Pro hustě definovaný operátor T platí* $\operatorname{Ker}(T^*) = R(T)^\perp$.

Lemma 11 (o transformaci grafu)**.** *Definujeme $V : H \times H \to H \times H$ předpisem $V(x, y) = (-y, x)$. Pak*

- *V je unitární operátor na $H \times H$,*
- *$G(T^*) = (V(G(T)))^\perp = V(G(T)^\perp)$ pro hustě definovaný operátor T na H,*

Tvrzení 12 (adjungovaný operátor a uzavřenost)**.** *Nechť T je hustě definovaný. Pak platí:*

- *Operátor T^* je uzavřený.*
- *T má uzavřené rozšíření, právě když T^* je hustě definovaný (pak $\overline{T} = T^{**}$).*
- *T je uzavřený, právě když $T = T^{**}$ (implicitně T^* je hustě definovaný).*

Definice. Nechť T je hustě definovaný operátor na H.

- Řekneme, že T je **symetrický**, pokud $T \subset T^*$, tj. pokud pro každé $x, y \in D(T)$ platí $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$.
- Řekneme, že T je **samoadjungovaný**, pokud $T = T^*$.

Lemma 13. *Nechť T je hustě definovaný samoadjungovaný operátor. Pak T je maximální symetrický (tj. neexistuje vlastní symetrické rozšíření T).*

Maximální symetrický operátor nemusí být samoadjungovaný.

Tvrzení 14 (další vlastnosti symetrických operátorů)**.** *Nechť T je symetrický hustě definovaný oprátor na H. Pak platí:*

(a) *$\overline{T}$ je symetrický.*
(b) *Je-li navíc $D(T) = H$, pak T je omezený a samoadjungovaný.*
(c) *Je-li $R(T)$ hustý, pak T prostý.*
(d) *Je-li $R(T) = H$, pak T je samoadjungovaný prostý a $T^{-1} \in L(H)$.*
(e) *Je-li T samoadjungovaný a prostý, pak T^{-1} je samoadjungovaný (speciálně hustě definovaný).*

Lemma 15 (o $(\alpha + i\beta)I - S$)**.** *Nechť S je symetrický na H a $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Pak $zI - S$ je prostý a jeho inverze je spojitá na $R(zI - S)$. Navíc, S je uzavřený, právě když $R(zI - S)$ je uzavřený.*

Věta 16 (spektrum samoadjungovaného operátoru)**.** *Pro každý samoadjungovaný operátor platí $\emptyset \neq \sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

Důsledek 17 (charakterizace samoadjungovanosti mezi symetrickými operátory)**.** *Pro operátor T na H je ekvivalentní:*

(a) *T je samoadjungovaný;*
(b) *T je symetrický a $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$;*
(c) *T je symetrický a existuje $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ s $z, \overline{z} \in \rho(T)$.*