II. Neomezené operátory na Hilbertových prostorech

II.1. Pojem neomezeného operátoru mezi Banachovými prostory.

Nechť X a Y jsou komplexní Banachovy prostory.

- **Operátorem z** X **do** Y rozumíme lineární zobrazení $T : D(T) \to Y$, kde $D(T)$ (**definiční obor** operátoru T) je vektorový podprostor prostoru X.
- Obor hodnot operátoru T, tj. množinu $T(X)$, značíme $R(T)$.
- Operátor T z X do Y nazveme **hustě definovaný**, pokud jeho definiční obor $D(T)$ je hustý v X.
- **Grafem operátoru** T rozumíme množinu
$$G(T) = \{(x, y) \in X \times Y : x \in D(T) \ \&\ Tx = y\}.$$
- Operátor T se nazývá **uzavřený**, pokud jeho graf $G(T)$ je uzavřená množina v $X \times Y$, tj. pokud pro každou posloupnost (x_n) v $D(T)$, pro kterou platí
  - $x_n \to x$ pro nějaké $x \in X$,
  - $Tx_n \to y$ pro nějaké $y \in Y$;

  platí $x \in D(T)$ a $Tx = y$.
- Nechť S a T jsou operátory z X do Y. Píšeme $S \subset T$, pokud $G(S) \subset G(T)$; tj. pokud $D(S) \subset D(T)$ a pro každé $x \in D(S)$ platí $Tx = Sx$. Operátor T se pak nazývá **rozšířením** operátoru S.
- Nechť S a T jsou operátory z X do Y. Jejich **součtem** rozumíme operátor $S + T$ s definičním oborem $D(S + T) = D(S) \cap D(T)$ definovaný vzorcem $(S + T)x = Sx + Tx$ pro $x \in D(T + S)$.
- Nechť T je operátor z X do Y a $\alpha \in \mathbb{C}$. Pokud $\alpha = 0$, pak operátorem αT rozumíme nulový operátor definovaný na X, pokud $\alpha \neq 0$, pak operátorem αT rozumíme operátor definovaný vzorcem $(\alpha T)x = \alpha \cdot Tx$ na $D(\alpha T) = D(T)$.
- Nechť T je operátor z X do Y a S je operátor z Y do Banachova prostoru Z, pak jejich složením rozumíme operátor ST s definičním oborem
$$D(ST) = \{x \in D(T) : Tx \in D(S)\}$$
definovaný vzorcem $(ST)(x) = S(T(x))$ pro $x \in D(ST)$.
- Je-li T prostý operátor z X do Y, **inverzním operátorem k** T rozumíme operátor T^{-1} z Y do X, jehož definičním oborem je $D(T^{-1}) = R(T)$ a který je inverzním zobrazením k T.

Lemma 1 (o grafu operátoru). *Podmnožina $L \subset X \times Y$ je grafem nějakého operátoru, právě když je to lineární podprostor splňující*
$$\{(x, y) \in L : x = 0\} = \{(0, 0)\}.$$

Tvrzení 2. *Pro operátory R, S, T mezi Banachovými prostory (pro které mají uvedené operace smysl), platí:*

- $(R + S) + T = R + (S + T)$;
- $(RS)T = R(ST)$;
- $(R + S)T = RT + ST$ *a* $T(R + S) \supset TR + TS$.

Tvrzení 3 (o uzavřených operátorech). *Nechť T je operátor z X do Y.*

- *Je-li T uzavřený a $D(T) = X$, pak $T \in L(X, Y)$.*
- *T má uzavřené rozšíření, právě když $(x_n, Tx_n) \to (0, y)$ v $D(T) \times Y$ implikuje $y = 0$.*
- *Je-li T uzavřený a prostý, pak T^{-1} je také uzavřený.*

Tvrzení 4 (o inverzi k uzavřenému operátoru)**.** *Nechť T je prostý uzavřený operátor z X do Y. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $R(T) = Y$ *a* $T^{-1} \in L(Y, X)$.
(ii) $R(T) = Y$.
(iii) $R(T)$ *je hustý v* Y *a* T^{-1} *je spojitý na* $R(T)$.

Poznámka. Pro neuzavřené operátory podmínky z předchozího tvrzení nejsou ekvivalentní. Podrobněji: Je-li T operátor z X do Y, který není uzavřený, pak:

- Podmínka (i) platit nemůže.
- Podmínka (ii) platit může. Pokud platí, pak neplatí ani (i) ani (iii). V tom případě T může a nemusí mít uzavřené rozšíření. Pokud má uzavřené rozšíření, pak operátor $\overline{T}$ není prostý.
- Podmínka (iii) platit může. Pokud platí, pak neplatí ani (i) ani (ii). V tom případě T může a nemusí mít uzavřené rozšíření. Pokud má uzavřené rozšíření, pak operátor $\overline{T}$ splňuje ekvivalentní podmínky z předchozího tvrzení.

Lemma 5. *Je-li S uzavřený a $T \in L(X, Y)$, pak $S + T$ je uzavřený.*

II.2. **Rezolventní množina, rezolventa a spektrum.**

Nechť X je Banachův prostor. **Operátorem na** X budeme rozumět operátor z X do X. Nechť T je operátor na X.

- **Rezolventní množinou** operátoru T rozumíme množinu všech $\lambda \in \mathbb{C}$, pro které operátor $\lambda I - T$ je prostý, na a $(\lambda I - T)^{-1} \in L(X)$. Značíme ji $\rho(T)$.
- **Rezolventou** (nebo **rezolventní funkcí**) operátoru T rozumíme zobrazení

$$\lambda \mapsto R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}, \qquad \lambda \in \rho(T).$$

- **Spektrem** operátoru T rozumíme množinu $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$.

Poznámka. (1) Pokud T není uzavřený, pak $\rho(T) = \emptyset$ a $\sigma(T) = \mathbb{C}$.

(2) Rezolventní množina se někdy definuje jiným způsobem. Někdy se požaduje
 (a) jen aby operátor $\lambda I - T$ byl prostý a na;
 někdy se požaduje,
 (b) aby operátor $\lambda I - A$ byl prostý, aby měl hustý obor hodnot a inverzní operátor aby byl spojitý.

Je-li T uzavřený, pak všechny tři definice jsou ekvivalentní; pro neuzavřené operátory dávají různé pojmy. Pokud operátor T není uzavřený, ale má uzavřené rozšíření, pak jeho rezolvetní množina podle možnosti (b) se rovná rezolventní množině operátoru $\overline{T}$; rezolventní množina podle možnosti (a) je s rezolventní množinou $\overline{T}$ disjunktní.

Tvrzení 6 (uzavřenost spektra)**.** *Je-li T operátor na X, pak $\sigma(T)$ je uzavřené.*

Lemma 7 (prázdné spektrum a T^{-1})**.** *Je-li T uzavřený operátor na X, pro který platí $\sigma(T) = \emptyset$, pak $T^{-1} \in L(X)$ a $\sigma(T^{-1}) = \{0\}$.*