I.5. **Involuce a C^*-algebry.**

Definice. Nechť A je Banachova algebra. **Involucí** na A rozumíme zobrazení $x \mapsto x^*$ algebry A do sebe takové, že pro všechna $x, y \in A$ a $\lambda \in \mathbb{C}$ platí:

$$(x+y)^* = x^* + y^*, \qquad (\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*, \qquad (xy)^* = y^* x^* \qquad \text{a} \qquad x^{**} = x.$$

Banachova algebra A s involucí se nazývá **C^*-algebra**, pokud pro každé $x \in A$ platí

$$\|x^* x\| = \|x\|^2.$$

Je-li A Banachova algebra s involucí a $x \in A$, pak prvek x se nazývá **samoadjungovaný** (neboli **hermiteovský**), pokud $x^* = x$; **normální**, pokud $x^* x = x x^*$.

Tvrzení 19. *Nechť A je Banachova algebra s involucí a $x \in A$. Pak platí:*

- *$x + x^*$, $i(x - x^*)$, $x^* x$ jsou samoadjungované.*
- *Existují jediné samoadjungované prvky $u, v \in A$ takové, že $x = u + iv$.*
- *Pokud $x = u + iv$, kde u, v jsou samoadjungované, pak x je normální, právě když $uv = vu$.*
- *Jednotka e je samoadjungovaná.*
- *$x \in G(A)$, právě když $x^* \in G(A)$ (pak $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$).*
- *$\sigma(x^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(x)\}$.*

Tvrzení 20. *Nechť A je C^*-algebra. Pak $\|x^*\| = \|x\|$ pro každé $x \in A$.*

Speciálně $\|x^* x\| = \|x x^*\| = \|x\|^2 = \|x^*\|^2$ pro každé $x \in A$ a $x \mapsto x^*$ je konjugovaně lineární izometrie A na A.

Důsledek 21. *Banachova algebra A s involucí je C^*-algebra, právě když $\|x^*\| = \|x\|$ a $\|x x^*\| = \|x\| \|x^*\|$ pro všechna $x \in A$.*

Věta 22 (o spektrálním poloměru a normě normálního prvku)**.** *Je-li A C^*-algebra a $a \in A$ je normální, pak $r(a) = \|a\|$.*

Definice. Nechť A a B jsou C^*-algebry a $h : B \to A$. Říkáme, že h je **$*$-homomorfismus**, je-li to homomorfismus Banachových algeber splňující navíc $h(x^*) = h(x)^*$ pro každé $x \in B$.

Tvrzení 23 (o automatické spojitosti $*$-homomorfismu)**.** *Nechť A a B jsou C^*-algebry a $h : B \to A$ je $*$-homomorfismus B do A. Pak $\|h\| \leq 1$.*

Tvrzení 24. *Nechť A je C^*-algebra. Pak pro $a \in A$ platí:*

(a) *Je-li a samoadjungovaný, pak $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.*
(b) *Je-li $a^* = a^{-1}$ (tj. a je* **unitární***), pak $\sigma(a) \subset \mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.*
(c) *Pro $h \in \Delta(A)$ a $a \in A$ platí $h(a^*) = \overline{h(a)}$ (h je $*$-homomorfismus, je-li to homomorfismus).*