II.5. **Měřitelný kalkulus a spektrální míry.**

Nechť $T \in L(H)$ je normální operátor. Nechť

$$f \mapsto \tilde{f}(T), \quad f \in C(\sigma(T)),$$

označuje spojitý funkční kalkulus (podle oddílu I.7). Pro každou dvojici $x, y \in H$ nechť $E_{x,y}$ je komplexní Radonova míra na $\sigma(T)$ taková, že platí

$$\langle \tilde{f}(T)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} f \, \mathrm{d}E_{x,y}\,, \quad f \in C(\sigma(T)).$$

Pak platí:

- $\|E_{x,y}\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ pro $x, y \in H$,
- $E_{x,x} \geq 0$ pro každé $x \in H$,
- zobrazení $(x, y) \mapsto E_{x,y}$ je seskvilineární.

Označme $\mathcal{A}_T$ σ-algebru podmnožin $\sigma(T)$, které jsou $E_{x,y}$-měřitelné pro všechna $x, y \in H$. Je-li nyní $h : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ omezená $\mathcal{A}_T$-měřitelná funkce, pak symbolem $\tilde{h}(T)$ značíme jediný prvek $L(H)$ splňující

$$\langle \tilde{h}(T)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} h \, \mathrm{d}E_{x,y}.$$

Zobrazení $h \mapsto \tilde{h}(T)$ se nazývá **měřitelný kalkulus** operátoru T. Pro $A \in \mathcal{A}_T$ označme

$$E(A) = \widetilde{\chi_A}(T).$$

Pak $E(A)$ je ortogonální projekce. Zobrazení $A \mapsto E(A)$ se nazývá **spektrální míra** operátoru T.

Definice. **Abstraktní spektrální mírou** v Hilbertově prostoru H rozumíme zobrazení E s následujícími vlastnostmi:

(i) Definičním oborem E je nějaká σ-algebra $\mathcal{A}$ podmnožin $\mathbb{C}$, která obsahuje všechny borelovské množiny.
(ii) Pro každé $A \in \mathcal{A}$ je $E(A)$ ortogonální projekce na H.
(iii) $E(\emptyset) = 0$, $E(\mathbb{C}) = I$.
(iv) Je-li $A \in \mathcal{A}$ takové, že $E(A) = 0$, pak pro každou $B \subset A$ platí $B \in \mathcal{A}$ (a $E(B) = 0$).
(v) $E(A \cap B) = E(A)E(B)$ pro $A, B \in \mathcal{A}$
(vi) $E(A \cup B) = E(A) + E(B)$ pro $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \emptyset$.
(vii) Pro každou dvojici $x, y \in H$ je zobrazení $E_{x,y} : A \mapsto \langle E(A)x, y\rangle$ komplexní borelovská míra na $\mathbb{C}$.

Poznámka.

- V bodě (vii) stačí předpokládat, že přo každé $x \in H$ je $E_x = E_{x,x}$ borelovská míra na $\mathbb{C}$.
- **Borelovskou mírou** výše rozumíme míru μ definovanou na σ-algebře $\mathcal{A}$ obsahující borelovské množiny takovou, že pro každou $A \in \mathcal{A}$ existují borelovské množiny B a C, pro které platí $B \subset A \subset C$ a $|\mu|(C \setminus B) = 0$.
- Spektrální míra omezeného normálního operátoru je abstraktní spektrální míra.

Tvrzení 22. *Nechť E je abstraktní spektrální míra v separabilním Hilbertově prostoru H. Pak pro každou $A \in \mathcal{A}$ existují borelovské množiny B a C, pro které platí $B \subset A \subset C$ a $E(C \setminus A) = 0$.*

Poznámka. Někdy se spektrální míra definuje jen pro separabilní prostory H. Pak se definuje jen na σ-algebře borelovských množin a vynechává se podmínka (iv). Pro neseparabilní H je třeba použít uvedenou definici.

Tvrzení 23 (integrál omezené funkce dle spektrální míry). *Je-li E abstraktní spektrální míra v H definovaná na σ-algebře $\mathcal{A}$ a $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je omezená $\mathcal{A}$-měřitelná funkce, pak existuje právě jeden operátor $\Phi_0(f) \in L(H)$, pro který platí*

$$\langle \Phi_0(f)x, y\rangle = \int f \, \mathrm{d}E_{x,y} \qquad x, y \in H.$$

Dále platí:

(a) $\|\Phi_0(f)x\| = \sqrt{\int |f|^2 \, \mathrm{d}E_x}$ *pro* $x \in H$,

(b) $\|\Phi_0(f)\| = \operatorname{ess\,sup} |f|$,

(c) Φ_0 *je* $*$*-homomorfismus* C^* *alebry omezených* $\mathcal{A}$*-měřitelných funkcí do* $L(H)$.

Značení: Operátor $\Phi_0(f)$ z předchozího tvrzení značíme $\int f \, \mathrm{d}E$ a nazýváme **integrálem funkce f podle spektrální míry E.**

Tvrzení 24 (spektrální rozklad omezeného normálního operátoru)**.** *Nechť* $T \in L(H)$ *je normální operátor. Pak existuje právě jedna abstraktní spektrální míra* E *v* H, *která splňuje*

$$T = \int \mathrm{id} \, \mathrm{d}E,$$

a to spektrální míra operátoru T. *Navíc platí pro každou* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *omezenou* $\mathcal{A}_T$*-měřitelnou*

$$\tilde{f}(T) = \int f \, \mathrm{d}E.$$

Tvrzení 25 (integrál (obecně neomezené) funkce dle spektrální míry)**.** *Nechť* E *je abstraktní spektrální míra v* H *definovaná na* σ*-algebře* $\mathcal{A}$, *a* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *nechť je* $\mathcal{A}$*-měřítelná funkce. Označme*

$$D(\Phi(f)) = \{x \in H : \int |f|^2 \, dE_x < \infty\}.$$

Pak $D(\Phi(f))$ *je hustý lineární podprostor* H. *Navíc existuje jediný operátor* $\Phi(f)$ *na* H *s definičním oborem* $D(\Phi(f))$, *který splňuje*

$$\langle \Phi(f)x, y\rangle = \int f \, \mathrm{d}E_{x,y}, \qquad x, y \in D(\Phi(f)).$$

Navíc platí:

$$\|\Phi(f)x\| = \sqrt{\int |f|^2 \, dE_x}, \qquad x \in D(\Phi(f)).$$

Značení: Operátor $\Phi(f)$ z předchozího tvrzení značíme $\int f \, \mathrm{d}E$ a nazýváme **integrálem funkce f podle spektrální míry E.**

Tvrzení 26 (vlastnosti $\int f \, dE$)**.** *Je-li* E *abstraktní spektrální míra v* H *a* f, g *jsou* $\mathcal{A}$*-měřitelné funkce, pak platí:*

(a) $\Phi(f) + \Phi(g) \subset \Phi(f + g)$;

(b) $\Phi(f)\Phi(g) \subset \Phi(fg)$ *a* $D(\Phi(f)\Phi(g)) = D(\Phi(g)) \cap D(\Phi(fg))$.

(c) $\Phi(f)^* = \Phi(\overline{f})$ *a* $\Phi(f)\Phi(f)^* = \Phi(|f|^2) = \Phi(f)^*\Phi(f)$, *speciálně* $\Phi(f)$ *je normální.*

(d) $\Phi(f)$ *je uzavřený operátor.*

(e) $\Phi(f)$ *je spojitý, právě když* f *je esenciálně omezená, tj. existuje* $A \in \mathcal{A}$, *že* $E(\mathbb{C} \setminus A) = 0$ *a* f *je omezená na* A.

Tvrzení 27 (spektrum $\int f \, dE$)**.** *Je-li* E *abstraktní spektrální míra a* f $\mathcal{A}$*-měřitelná funkce, pak*

$$\sigma(\int f \, dE) = W_E(f) := \mathbb{C} \setminus \bigcup \{G \subset \mathbb{C} : G \text{ otevřená }, E(f^{-1}(G)) = 0\}.$$