II.4. **Symetrické operátory a Cayleyova transformace.**

Nechť S je symetrický operátor na H, tj. Označme symbolem C_S operátor

$$C_S = (S - iI)(S + iI)^{-1}.$$

Pak C_S je operátor na H, který se nazývá **Cayleova transformace operátoru** S.

Věta 18 (vlastnosti C_S)**.** *Nechť S je symetrický a $U = C_S$ je jeho Cayleyova transformace. Pak*

(a) *U je lineární izometrie $D(U) = R(S + iI)$ na $R(U) = R(S - iI)$.*
(b) *$I - U = 2i(S + iI)^{-1}$; speciálně, operátor $I - U$ je prostý a $R(I - U) = D(S)$.*
(c) *$S = i(I + U)(I - U)^{-1}$.*
(d) *U je uzavřený $\Leftrightarrow$ S je uzavřený $\Leftrightarrow$ $D(U)$ je uzavřený $\Leftrightarrow$ $R(U)$ je uzavřený.*

Lemma 19 (o izometrickém operátoru)**.** *Nechť U je libovolný operátor na H, který je izometrií $D(U)$ na $R(U)$. Pak*

(a) *$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ pro všechna $x, y \in D(U)$. Speciálně: U je unitární, právě když je $D(U) = R(U) = H$.*
(b) *Je-li $R(I - U)$ hustý v H, je $I - U$ prostý.*

Věta 20 (charakterizace obrazu Cayleyovy transformace)**.** *Nechť U je operátor na H, který je izometrií $D(U)$ na $R(U)$. Předpokládejme, že $I - U$ je prostý a $R(I - U)$ je hustý. Pak operátor $S = i(I + U)(I - U)^{-1}$ je symetrický a platí $C_S = U$.*

Poznámky

(1) Ve Větě 20 lze vynechat předpoklad, že $I - U$ je prostý, protože plyne z ostatních předpokladů (díky Lemmatu 19(b)).
(2) Věty 18 a 20 lze formulovat i pro operátory, které nejsou hustě definované. Pokud za symetrický operátor prohlásíme operátor S, který splňuje $\langle Sx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$ pro všechna $x, y \in D(S)$, pak Věta 18 platí beze změny a Věta 20 platí, i pokud vynecháme předpoklad hustoty $R(I - U)$.

Věta 21 (Cayleova transformace pro samoadjungované operátory)**.**

- *Nechť S je symetrický operátor na H. Pak S je samoadjungovaný, právě když C_S je unitární operátor.*
- *Nechť U je unitární operátor na H, pro který je $I - U$ prostý. Pak operátor $S = i(I + U)(I - U)^{-1}$ je samoadjungovaný a platí $C_S = U$.*

Poznámky.

(1) Nechť S a T jsou symetrické operátory na H. Pak $S \subset T$, právě když $C_S \subset C_T$.
(2) Nechť S je uzavřený symetrický operátor na H. Pak kodimenze podprostorů $D(C_S)$ a $R(C_S)$ nazýváme **indexy defektu** operátoru T. Pak platí:
    - T je samoadjungovaný, právě když oba indexy defektu jsou nulové.
    - T je maximální symetrický operátor, právě když aspoň jeden z indexů defektu je nulový.
    - T má samoadjungované rozšíření, právě když oba indexy defektu jsou stejné.